TD 13

OBJECTIFS :

- AN 29-1 : Connaître parfaitement les développements limités des fonctions usuelles.
- AN 29-2 : Calculer des développements limités de fonctions par opérations algébriques, par composition, par intégration.
- AN 29-3 : Déterminer le développement limité d'une fonction réciproque.
- AN 29-4 : Savoir exploiter un développement limité pour étudier des propriétés locales d'une fonction.
- AN 29-5 : Savoir déterminer une équation d'asymptote oblique à partir d'un développement asymptotique d'une fonction au voisinage de l'infini.
- AL 30-1 : Ecrire la matrice d'une application linéaire relativement aux bases canoniques ou à d'autres bases.
- AL 30-2 : Déterminer analytiquement une application linéaire donnée par sa matrice.
- AL 30-3 et 30-4 : Déterminer et utiliser la matrice de passage pour déterminer la matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base.
- AL 30-5 : Utiliser les matrices semblables.
- AL 30-6 : Déterminer le rang d'une matrice.
- AL 30-7 : Utiliser des matrices pour étudier des suites récurrentes linéaires.

Développements limités

EXERCICE 1

Déterminer les développements limités des fonctions f suivantes au voisinage de 0 :

1. $f : x \mapsto e^x \cos x$, à l'ordre 3.
2. $f : x \mapsto \sin(2x)\sqrt{1+x}$, à l'ordre 3.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x}{x^3}$, à l'ordre 3.
4. $f : x \mapsto e^{\sin x}$, à l'ordre 3.
5. $f : x \mapsto \ln(\cos(2x))$ à l'ordre 4.
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4.
7. $f : x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 6.
8. $f : x \mapsto \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ à l'ordre 3.
9. $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ à l'ordre 3.
10. $f : x \mapsto \sqrt{3+\cos x}$ à l'ordre 3.
11. $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}\, x$ à l'ordre 4.
12. $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ à l'ordre 3.

EXERCICE 2

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de la fonction cosinus.
2. $DL_2(3)$ de la fonction racine carrée.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par $\forall x \in]-1;1[, f(x) = x + \ln(1+x)$.

1. Déterminer un $DL_3(0)$ de la fonction f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]-1;1[$ sur un intervalle J à déterminer.
3. Montrer que la réciproque f^{-1} admet un $DL_3(0)$.
4. On note $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$ le développement limité de f^{-1} en 0. En exploitant la relation $f^{-1} \circ f = id_{]-1;1[}$, déterminer le développement limité de f^{-1} en 0.

EXERCICE 4

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^{x^2}$ admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer un $DL_5(0)$ de f^{-1}.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\ln(1+x)}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Déterminer un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.
3. (a) Justifier que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   (b) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et déterminer sa position relative par rapport à $\mathscr{C}$.

EXERCICE 6

1. Déterminer un $DL_2(0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+3x+x^2}$.
2. En déduire une équation de la tangente au point d'abscisse 0 et la position de la tangente par rapport à la courbe de la fonction f.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $-\infty$ et la position de cette asymptote par rapport à la courbe de la fonction f.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $[0;2\pi[$ par $\forall x \in [0;2\pi[$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{1-\cos x}{2x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -2\ln 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{=} -2\ln 2 - \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.
2. (a) Justifier que f est continue et dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.
   (b) Montrer que f admet un maximum local en 0 et préciser la valeur de ce maximum.
3. Le but de cette question est de montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.
   (a) Justifier la dérivabilité de f sur $]0;2\pi[$ puis montrer que $\forall x \in]0;2\pi[, f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1-\cos x)}$ avec $g : x \mapsto x\sin x + 2\cos x - 2$.
   (b) Conclure.

EXERCICE 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par $\forall x \in [0;+\infty[, f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \in]0;+\infty[$ et $f_n(0) = 0$.
Soit $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montrer que f_n est continue en 0.
2. Montrer que f_n est dérivable en 0. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 ?
3. (a) Etudier le sens de variation de la fonction f_n.
   (b) Calculer la limite de f_n en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
4. (a) Montrer que $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - n + \dfrac{n^2}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une asymptote oblique Δ_n en $+\infty$ et étudier la position relative de $\mathscr{C}_n$ et Δ_n au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{(x^2+1)\text{Arctan}(x)}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Etudier la parité de la fonction f.
2. Déterminer un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f.

3. (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
Pour la suite, on note encore f la fonction ainsi prolongée.
Est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.
   (b) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et préciser la position de cette tangente par rapport à $\mathscr{C}$ au voisinage de 0.
4. (a) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.
   (b) Déterminer un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$.
   (c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ et étudier sa position par rapport à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
   (d) Etudier la branche infinie de $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

Représentation matricielle

Exercice 10

Ecrire la matrice des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques. Déterminer le noyau et l'image de chacune de ces applications.

1. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x-y,2y,3x+y)$.
2. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=x-5y+4z$.
3. $f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$ définie par $\forall P\in\mathbb{R}_2[X], f(P)=P-XP'$.
4. $f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}^3$ définie par $\forall P\in\mathbb{R}_2[X], f(P)=\big(P(-1),P(0),P(1)\big)$.
5. $f:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_1[X]$ telle que pour tout $P\in\mathbb{R}_3[X]$, $f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par X^2+X+2. Vérifier que f est bien linéaire.
6. $f:\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\to\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\forall M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), f(M)=AM$ avec $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ les applications linéaires définies par
$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=(x+2y+z,y+2z)$ et $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$g(x,y)=(3x+y,x,2y)$.
Déterminer les matrices de $f\circ g$ et $g\circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ puis les expressions analytiques de $f\circ g$ et $g\circ f$.

Exercice 12

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension n.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n=0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1}\neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x)\neq 0_E$.
Montrer que la famille $\mathscr{B}=\big(x,f(x),f^2(x),\cdots,f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.
Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 13

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&3\end{pmatrix}$.

Soit $e_1=(0,1,1), e_2=(1,0,1)$ et $e_3=(1,1,0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\epsilon_1=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\epsilon_2=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'expression analytique de l'application f.
2. Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et que (ϵ_1,ϵ_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de f dans ces nouvelles bases.

EXERCICE 14

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$,
$f(P) = (X^2+2)P" + (X+1)P' + P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. f est-elle bijective ?
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f-5id)$ où id est l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Calculer $f(1), f(X+1)$.
5. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 15

On considère l'application f définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,
$f(M) = M + 2M^T$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $f^{-1}(M)$ et en déduire son expression comme combinaison linéaire de M et de M^T.

EXERCICE 16

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique, notée $\mathscr{B}$, est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.
   Ecrire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Retrouver la matrice A' en utilisant la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

EXERCICE 17

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'expression analytique de l'application f.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ avec $\epsilon_1 = (i, 2)$ et $\epsilon_2 = (-2i, 1)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 18

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

et $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ suivant les valeurs de a.

EXERCICE 19

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
   Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
   Exprimer alors X_n en fonction de n et X_0 et A.

2. On considère $\mathscr{C} = (u, w)$ une base de $\mathbb{R}^2$ où $u = (1,1)$ et $w = (1,3)$.
   Calculer $f(v)$ et $f(w)$ où on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 20

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On note id l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$ et I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On pose $g = f - 2\mathrm{id}$ et $B = A - 2I_3$.

1. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. (a) Déterminer le noyau de g puis celui de $g^2 = g \circ g$.
   (b) $\mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Ker}\, g^2$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$?
3. (a) On pose $U = X + X^2, V = 1 - X$ et $W = X$. Montrer que $\mathscr{B}' = (U, V, W)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}'$ et en déduire la matrice N de g dans la base $\mathscr{B}'$.
4. On pose $\mathrm{Com}(f) = \left\{h \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right) / h \circ f = f \circ h\right\}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Com}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$.
   (b) Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et M' sa matrice dans la base $\mathscr{B}'$.
   Montrer que $h \in \mathrm{Com}(f) \iff M'N = NM'$.
   (c) En déduire $\mathrm{Com}(f)$.

EXERCICE 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Le but de cette question est de montrer que les matrices A et D sont semblables. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   (a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right), \mathrm{Ker}\left(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.
   (b) En déduire une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$.
   (c) Conclure.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On considère les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et
   $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= v_n + w_n \\ v_{n+1} &= -2u_n - 3v_n - 5w_n \\ w_{n+1} &= 2u_n + 2v_n + 4w_n \end{cases}$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer une relation entre X_{n+1} et X_n puis une relation entre X_n et X_0.
   (b) Déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n).