

**Applications linéaires.**

- Définition et notation de l'ensemble des applications linéaires entre deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, caractérisation, définition d'un endomorphisme, définition de l'homothétie, définition d'un isomorphisme, opérations sur les applications linéaires (linéarité, composition), réciproque d'un isomorphisme.
- Définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire, structure des sous-espaces vectoriels de l'image et du noyau, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité à l'aide du noyau et de l'image, image d'une application linéaire à l'aide d'une famille finie génératrice de l'espace de départ.
- Automorphismes : définition, notation, propriétés.
- Existence et unicité d'une application définie par l'image d'une base de l'espace de départ, caractérisation de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire par l'image d'une base de l'espace de départ, caractérisation de la bijectivité si les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, définition et caractérisation de deux espaces vectoriels isomorphes, dimension de l'ensemble des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension finie.
- Définition du rang, propriétés, forme géométrique du théorème du rang : Si  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ , alors  $f|_S$  est un isomorphisme de  $S$  dans  $\text{Im } f$ . Théorème du rang.

**Dérivabilité.**

- Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité d'ordre 1, dérivabilité à gauche et droite (demi-tangente), caractérisation de la dérivabilité en un point à l'aide de la dérivabilité à gauche et à droite.
- Fonction dérivée, opérations sur les fonctions dérivées (somme, produit, quotient, composition et réciproque).
- Définition d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle, expression de la dérivée n-ième d'une somme, d'un produit (formule de Leibniz), quotient, composée de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ , réciproque d'une fonction bijective de classe  $\mathcal{C}^n$ .
- Définition d'un point critique, d'un maximum local, d'un minimum local d'un extremum local, condition nécessaire pour avoir un extremum local en un point intérieur, théorème de Rolle et égalité des accroissements finis, fonction  $K$ -lipschitzienne et inégalité des accroissements finis, dérivabilité et monotonie, théorème de la limite de la dérivée.

**Développements limités.**

- Définition d'un DL, changement de variable pour se ramener au voisinage de 0, unicité d'un développement limité sous réserve d'existence.
- Formule de Taylor-Young (DL des fonctions exponentielle, cosinus, sinus,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  au voisinage de 0).
- Propriétés des DL : lien parité et puissances de  $x$  dans la partie régulière d'un DL, troncature d'un développement limité, lien DL avec la continuité et la dérivabilité.
- Opérations sur les DL : Combinaison linéaire, produit, composée (DL du sinus et du cosinus hyperboliques), quotient (développement limité de tangente à l'ordre 3 au voisinage de zéro), intégration (DL de  $x \mapsto \ln(1+x)$  et de  $\text{Arctan}$  au voisinage de 0).
- Recherche d'équivalent, calcul de limite, existence et nature d'un extremum en un point, tangente à une courbe en un point et position relative de la courbe et de sa tangente, asymptote et position relative de la courbe par rapport à son asymptote.

**Un énoncé au choix à demander :**

- Définition d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.
- Caractérisation d'une application linéaire.
- Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.
- Définition du rang d'une application linéaire et théorème du rang.
- Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est injective.
- Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est surjective.
- Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est bijective.
- Définition de deux espaces vectoriels isomorphes et caractérisation en dimension finie.
- Définition de la dérivabilité à gauche et à droite d'une fonction à valeurs réelles en un point.
- Caractérisation de la dérivabilité en un point intérieur à l'aide de la dérivabilité à gauche et de la dérivabilité à droite.
- Définition d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Formule de Leibniz pour les fonctions.
- Définition d'un maximum local et d'un minimum local.
- Définition d'une fonction  $K$ -lipschitzienne,  $K > 0$ .
- Inégalité des accroissements finis.
- Formule de Taylor-Young.
- Lien entre continuité et DL, dérivabilité et DL.
- 2 développements limités au choix du colleur parmi les 11 à connaître (voir encadré sur la dernière page de ce programme). *Le colleur peut demander d'énoncer ces DL à n'importe quel ordre!*

**Démonstrations :**

- Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $E$  de dimension finie égale à  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et considérons  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
Démontrer que  $f$  est injective sur  $E$  si et seulement si  $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille libre.
- Soit  $I$  un intervalle ouvert,  $a \in I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs réelles.  
Démontrer que si  $f$  est dérivable en  $a$  et si  $f$  admet un extremum local en  $a$  alors  $f'(a) = 0$ .  
Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Développement limité de Arctan à l'ordre  $2n + 1$  au voisinage de 0.  
Développement limité de la fonction tangente à l'ordre 4 au voisinage de 0.

**Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :**

TD 12 : exercice 1, exercice 2, exercice 4, exercice 5, exercice 7, exercice 8, exercice 10, exercice 11, exercice 12 questions 1 et 2, exercice 13 questions 1 et 2, exercice 14 questions 1 et 2, exercice 16, exercice 17, exercice 18.

TD 13 : exercice 1, exercice 3.

*Uniquement en classe B :* exercice 6.

**Exercices traités en autonomie :**

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 12 : exercice 3, exercice 6, exercice 9, exercice 13 question 3, exercice 15.

*Les deux exercices suivants ont été faits en cours en classe B, les colleurs peuvent interroger sur des exercices de ce type!*

**EXERCICE 1**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  par  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ .

- Déterminer un développement asymptotique de  $f$  à la précision  $\frac{1}{x}$  au voisinage de  $+\infty$ .
- En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  et préciser la position de cette droite par rapport à la courbe.

**EXERCICE 2**

On considère la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 - 1}$ .

- Déterminer un développement asymptotique de  $f$  à la précision  $\frac{1}{x^2}$  au voisinage de  $+\infty$ .
- En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  et préciser la position de cette droite par rapport à la courbe.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sont à connaître par coeur les développements limités au voisinage de 0 suivants :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \text{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \text{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \text{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\ \text{et aussi celui à l'ordre 3 de la fonction tangente : } \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$