Dérivabilité.

- Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité d'ordre 1, dérivabilité à gauche et droite (demi-tangente), caractérisation de la dérivabilité en un point à l'aide de la dérivabilité à gauche et à droite.
- Fonction dérivée, opérations sur les fonctions dérivées (somme, produit, quotient, composition et réciproque).
- Définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle, expression de la dérivée n-ième d'une somme, d'un produit (formule de Leibniz), quotient, composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, réciproque d'une fonction bijective de classe $\mathscr{C}^n$.
- Définition d'un point critique, d'un maximum local, d'un minimum local d'un extremum local, condition nécessaire pour avoir un extremum local en un point intérieur, théorème de Rolle et égalité des accroissements finis, fonction K-lipschitzienne et inégalité des accroissements finis, dérivabilité et monotonie, théorème de la limite de la dérivée.

Développements limités.

- Définition d'un DL, changement de variable pour se ramener au voisinage de 0, unicité d'un développement limité sous réserve d'existence.
- Formule de Taylor-Young (DL des fonctions exponentielle, cosinus, sinus, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0).
- Propriétés des DL : lien parité et puissances de x dans la partie régulière d'un DL, troncature d'un développement limité, lien DL avec la continuité et la dérivabilité.
- Opérations sur les DL : Combinaison linéaire, produit, composée (DL du sinus et du cosinus hyperboliques), quotient (développement limité de tangente à l'ordre 3 au voisinage de zéro), intégration (DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de Arctan au voisinage de 0).
- Recherche d'équivalent, calcul de limite, existence et nature d'un extremum en un point, tangente à une courbe en un point et position relative de la courbe et de sa tangente, asymptote et position relative de la courbe par rapport à son asymptote.

Représentation matricielle.

- Définition de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Matrice de l'image d'un vecteur par une application linéaire, matrice d'une composée d'applications linéaires. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dimension de $\mathscr{L}(E,F)$, caractérisation d'un isomorphisme de E dans F si $\dim(E) = \dim(F)$.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Définition du rang d'une matrice, théorème du rang pour les matrices, lien entre rang d'une application linéaire et rang d'une de ses matrices, caractérisation des matrices inversibles en termes de noyau, image et rang, rang de la transposée.
- Matrice de passage d'une base à une autre, lien avec la matrice d'une application linéaire, inversibilité d'une matrice de passage et calcul de son inverse, effet d'un changement de base sur la matrice : d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Un énoncé au choix à demander :

- ☐ Définition d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.
- ☐ Caractérisation d'une application linéaire.
- ☐ Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.
- ☐ Définition du rang d'une application linéaire et théorème du rang.
- ☐ Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est injective.
- ☐ Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est surjective.
- ☐ Donner deux méthodes pour montrer qu'une application linéaire est bijective.
- ☐ Définition de deux espaces vectoriels isomorphes et caractérisation en dimension finie.
- ☐ Définition de la dérivabilité à gauche et à droite d'une fonction à valeurs réelles en un point.
- ☐ Caractérisation de la dérivabilité en un point intérieur à l'aide de la dérivabilité à gauche et de la dérivabilité à droite.
- ☐ Définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- ☐ Formule de Leibniz pour les fonctions.
- ☐ Définition d'un maximum local et d'un minimum local.
- ☐ Définition d'une fonction $K-$lipschitzienne, $K > 0$.
- ☐ Inégalité des accroissements finis.
- ☐ Formule de Taylor-Young.
- ☐ Lien entre continuité et DL, dérivabilité et DL.
- ☐ 2 développements limités au choix du colleur parmi les 11 à connaître (voir encadré sur la dernière page de ce programme). *Le colleur peut demander d'énoncer ces DL à n'importe quel ordre !*
- ☐ Matrice d'une composée d'applications linéaires.
- ☐ Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- ☐ Formule de changement de base pour un endomorphisme.

Démonstrations :

- ☐ Soit $n \in \mathbb{N}$. Développement limité de Arctan à l'ordre $2n+1$ au voisinage de 0.
  Développement limité de la fonction tangente à l'ordre 4 au voisinage de 0.
- ☐ Exercice 6 TD 13.
- ☐ On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X], f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par X^2+X+2.
  (a) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.
  (b) Déterminer l'image de f puis le noyau de f.

Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :

TD 12 : exercice 1, exercice 2, exercice 4, exercice 5, exercice 7, exercice 8, exercice 10, exercice 11, exercice 12 questions 1 et 2, exercice 13 questions 1 et 2, exercice 14 questions 1 et 2, exercice 16, exercice 17, exercice 18.

TD 13 : exercice 1, exercice 3, exercice 5, exercice 6, exercice 8, exercice 9, exercice 10, exercice 13.
Uniquement en classe B : exercice 14.

Exercices traités en autonomie :

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 12 : exercice 3, exercice 6, exercice 9, exercice 13 question 3, exercice 15.
TD 13 : exercice 2, exercice 4, exercice 7, exercice 11, exercice 18 matrices B, C, D.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Sont à connaître par coeur les développements limités au voisinage de 0 suivants :

$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

et aussi celui à l'ordre 3 de la fonction tangente : $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$