TD 13

Eléments de correction

EXERCICE 2

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de la fonction cosinus.

   Soit $x \in V\left(\frac{\pi}{4}\right)$, on pose $h = x - \frac{\pi}{4}$. Alors $h \in V(0)$ et $x = h + \frac{\pi}{4}$.

   $\cos(x) = \cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(h) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(h)$.

   Or $\cos h \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)$ et $\sin h \underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$ donc

   $$\boxed{\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)}.$$

2. $DL_2(3)$ de la fonction racine carrée.

   Utilisons une autre méthode que le changement de variable utilisé dans la question précédente.

   Soit f la fonction racine carrée.

   La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ donc d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 3 et $f(x) \underset{x\to 3}{=} f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2}(x-3)^2 + o\left((x-3)^2\right)$.

   Or $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ donc

   $f(x) \underset{x\to 3}{=} \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) - \frac{1}{24\sqrt{3}}(x-3)^2 + o\left((x-3)^2\right)$.

   Ainsi $\boxed{\sqrt{x} \underset{x\to 3}{=} \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}(x-3) - \frac{\sqrt{3}}{72}(x-3)^2 + o\left((x-3)^2\right)}$.

EXERCICE 4

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^{x^2}$ admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer un $DL_5(0)$ de f^{-1}.

La fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc par composée et produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x^2}(1+2x^2)$ donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

f admet donc une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

Or f est de classe $\mathscr{C}^5$ sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^5$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le théorème de Taylor-Young, f^{-1} admet un développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0.

De plus, f est impaire et f^{-1} est définie sur un intervalle centré en 0 donc f^{-1} est impaire.

Alors la partie régulière de son $DL_5(0)$ est impaire.

Donc son $DL_5(0)$ s'écrit sous la forme $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$.

De plus, $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$ (à montrer!) donc

$(f^{-1}\circ f)(x) \underset{x\to 0}{=} a_1\left(x+x^3+\frac{x^5}{2}\right) + a_3\left(x+x^3+\frac{x^5}{2}\right)^3 + a_5\left(x+x^3+\frac{x^5}{2}\right)^5 + o(x^5)$.

Alors $(f^{-1}\circ f)(x) \underset{x\to 0}{=} a_1x + (a_1+a_3)x^3 + \left(\frac{1}{2}a_1 + 3a_3 + a_5\right)x^5 + o(x^5)$.

Or $f^{-1}\circ f = id_{\mathbb{R}}$ donc $(f^{-1}\circ f)(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^5)$.

Alors par unicité du développement limité, $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 + a_3 = 0 \\ \frac{1}{2}a_1 + 3a_3 + a_5 = 0 \end{cases}$.

D'où $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -1 \\ a_5 = \frac{5}{2} \end{cases}$. Ainsi $\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)}$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $[0;2\pi[$ par $\forall x\in[0;2\pi[$,

$$f(x)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{2x^2}\right) & \text{si} \quad x\neq 0\\ -2\ln 2 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

1. Montrer que $f(x)\underset{x\to 0}{=}-2\ln 2-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)$.

   $\cos x\underset{x\to 0}{=}1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ donc $\frac{1-\cos x}{2x^2}\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{4}-\frac{1}{48}x^2+o(x^2)$.

   Alors $f(x)\underset{x\to 0}{=}\ln\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)\right)\right)=\ln\frac{1}{4}+\ln\left(1-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)\right)$.

   Or $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}x^2\right)=0$ et $\ln(1+X)\underset{X\to 0}{=}X+o(X)$ donc

   $f(x)\underset{x\to 0}{=}-\ln 4-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)$.

   Ainsi $\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{=}-2\ln 2-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)}$.

2. (a) Justifier que f est continue et dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.

   $f(x)\underset{x\to 0}{=}-2\ln 2+o(x)$ donc f admet un $DL_1(0)$. Ainsi f est dérivable en 0 (et donc continue en 0) et $f'(0)=0$.

   (b) Montrer que f admet un maximum local en 0 et préciser la valeur de ce maximum.

   $f(0)=-2\ln 2$ donc $f(x)-f(0)\underset{x\to 0}{=}-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)$.

   Alors $f(x)-f(0)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{12}x^2$.

   Or $\forall x\in V(0), -\frac{1}{12}x^2\leq 0$ donc $\forall x\in V(0), f(x)-f(0)\leq 0$.

   Alors $\forall x\in V(0), f(x)\leq f(0)$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ admet un maximum local en 0 égal à } -2\ln 2}$.

3. Le but de cette question est de montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.

   (a) Justifier la dérivabilité de f sur $]0;2\pi[$ puis montrer que $\forall x\in]0;2\pi[, f'(x)=\frac{g(x)}{x(1-\cos x)}$ avec $g:x\mapsto x\sin x+2\cos x-2$.

   $x\mapsto 1-\cos x$ est dérivable sur $]0;2\pi[$ à valeurs dans $]0;2]$ et la fonction $x\mapsto 2x^2$ est dérivable sur $]0;2\pi[$ à valeurs dans $]0;8\pi^2[$.

   Donc $x\mapsto\frac{1-\cos x}{2x^2}$ est dérivable sur $]0;2\pi[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

   Or la fonction ln est dérivable sur cet intervalle donc par composée, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;2\pi[}$.

   Soit $x\in]0;2\pi[$, $f(x)=\ln(1-\cos x)-\ln(2x^2)=\ln(1-\cos x)-\ln 2-2\ln x$.

   Alors $f'(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}-\frac{2}{x}=\frac{x\sin x-2+2\cos x}{x(1-\cos x)}$.

   Ainsi $\boxed{\forall x\in]0;2\pi[, f'(x)=\frac{g(x)}{x(1-\cos x)} \text{ où } g(x)=x\sin x-2+2\cos x}$.

   (b) Conclure.

   f est dérivable en 0 (question 2.(a)).

   Il ne reste plus qu'à montrer que f' est continue en 0 pour conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.

   Un $DL_4(0)$ de la fonction g est : $g(x)\underset{x\to 0}{=}-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$ (à montrer!).

   On en déduit que $g(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{12}x^4$.

   Or $1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{2}x^2$ donc par produit et quotient, $f'(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{6}x$.

   Alors $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{6}x=0$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$.

   Ainsi f' est continue en 0. Donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0}$.

EXERCICE 11

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ les applcations linéaires définies par
$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=(x+2y+z,y+2z)$ et $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$g(x,y)=(3x+y,x,2y)$.
Déterminer les matrices de $f\circ g$ et $g\circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ puis les expressions analytiques de $f\circ g$ et $g\circ f$.

$\text{Mat}_{\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^3},\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^2}}(f)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^2},\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^3}}(g)=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\\0&2\end{pmatrix}$.

$f\circ g$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et

$\text{Mat}_{\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^2}}(f\circ g)=\text{Mat}_{\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^3},\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^2}}(f)\text{Mat}_{\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^2},\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^3}}(g)=\begin{pmatrix}5&3\\1&4\end{pmatrix}$.

$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,(f\circ g)(x,y)=(5x+3y,x+4y)}$.

$g\circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et

$\text{Mat}_{\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^3}}(g\circ f)=\text{Mat}_{\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^2},\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^3}}(g)\text{Mat}_{\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^3},\mathscr{B}^c_{\mathbb{R}^2}}(f)=\begin{pmatrix}3&7&5\\1&2&1\\0&2&4\end{pmatrix}$.

$\boxed{\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(f\circ g)(x,y,z)=(3x+7y+5z,x+2y+z,2y+4z)}$.

EXERCICE 12

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension n.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n=0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1}\neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x)\neq 0_E$.
Montrer que la famille $\mathscr{B}=\left(x,f(x),f^2(x),\cdots,f^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.
Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
Vérifions que $\mathscr{B}$ est une famille de vecteurs non nuls.
On suppose qu'il existe $k\in[\![0,n-2]\!]$ tel que $f^k(x)=0_E$.
f est une application linéaire donc f^{n-k-1} est aussi une application linéaire.
Alors $f^{n-k-1}(f^k(x))=f^{n-1}(x)=0_E$.
Absurde! Donc $\mathscr{B}$ est une famille de vecteurs non nuls.
Montrons que $\mathscr{B}$ est libre.
Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0x+\lambda_1f(x)+\lambda_2f^2(x)+\cdots+\lambda_{n-1}f^{n-1}(x)=0_E(*)$. A-t-on $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$?
Alors en composant par f^{n-1} et par linéarité, on a $\lambda_0f^{n-1}(x)+\lambda_1f^n(x)+\lambda_2f^{n+1}(x)+\cdots+\lambda_{n-1}f^{2n-2}(x)=0_E$.
Or $f^n=0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $f^{n+1}=f^{n+2}=\cdots=f^{2n-2}=0_{\mathscr{L}(E)}$. D'où $\lambda_0f^{n-1}(x)=0_E$.
Or $f^{n-1}\neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $\lambda_0=0$.
Alors $\lambda_1f^n(x)+\lambda_2f^{n+1}(x)+\cdots+\lambda_{n-1}f^{2n-2}(x)=0_E$. On compose par f^{n-2}.
Par linéarité, on a $\lambda_1f^{n-1}(x)+\lambda_2f^n(x)+\cdots+\lambda_{n-1}f^{2n-3}(x)=0_E$.
Or $f^n=0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $f^{n+1}=f^{n+2}=\cdots=f^{2n-3}=0_{\mathscr{L}(E)}$. D'où $\lambda_1f^{n-1}(x)=0_E$.
Or $f^{n-1}\neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $\lambda_1=0$.
On réitère le procédé et on trouve que $\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$.
Alors $\mathscr{B}$ est libre.
De plus, elle est composée de n vecteurs d'un espace de dimension n.

Donc $\boxed{\mathscr{B}\text{ est une base de }E}$ et $\boxed{Mat_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}}$

EXERCICE 17

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est $A=\begin{pmatrix}-1&2i\\-2i&2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'expression analytique de l'application f.

   f est un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est carrée d'ordre 2 , alors $\mathbb{C}^2$ est ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et la base est $((1,0),(0,1))$. Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$.

   $A\times\begin{pmatrix}z\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2i\\-2i&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z+2iz'\\-2iz+2z'\end{pmatrix}$.

   Donc $\boxed{\forall\left(z,z'\right)\in\mathbb{C}^2,f\left(z,z'\right)=\left(-z+2iz',-2iz+2z\right)}$.

2. Montrer que $\mathscr{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ avec $\epsilon_1 = (i, 2)$ et $\epsilon_2 = (-2i, 1)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.

Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires, alors $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une famille libre de 2 vecteurs d'un espace de dimension 2 , donc

$\boxed{\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ est une base de } \mathbb{C}^2}$.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

$A \times \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $f(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1$.

De même, $A \times \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2$.

Ainsi $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, alors $P = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = P^{-1}AP$, donc $A = PA'P^{-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \left(PA'P^{-1}\right)^n = P\left(A'\right)^n P^{-1}$ (à savoir montrer par récurrence).

$P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -i & 2 \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -i & 2 \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n + 4(-2)^n & 2i \times 3^n - 2i \times (-2)^n \\ -2i \times 3^n + 2i \times (-2)^n & 4 \times 3^n + (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^n + (-2)^{n+2} & 2i\left(3^n - (-2)^n\right) \\ -2i\left(3^n - (-2)^n\right) & 4 \times 3^n + (-2)^n \end{pmatrix}}$.

Exercice 18

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

En effectuant les opérations $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1, C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ puis $C_3 \longleftarrow C_3 - 3C_2$, on obtient :

$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$ car la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

En effectuant les opérations $C_3 \longleftarrow C_3 - 7C_1, C_4 \longleftarrow C_4 - C_1$, on obtient :

$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -11 & 7 & 77 & 14 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -11 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ car la famille $\left(\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

De la même façon, on trouve que $\mathrm{rg}(D) = 2$.