

# TD 11

## Éléments de correction

### EXERCICE 2

4. Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles?

Notons  $E$  l'ensemble des tirages possibles.  $E$  est l'ensemble des 4-listes de l'ensemble des 13 boules de l'urne donc  $\text{card}(E) = 13^4$ .

Il y a donc 28561 tirages possibles.

(b) Combien y a-t-il de tirages comportant au moins une boule blanche?

Notons  $E_1$  l'ensemble des tirages comportant au moins une boule blanche. Alors  $\overline{E_1}$  est l'ensemble des tirages ne comportant que des boules noires. Or  $\text{card}(\overline{E_1}) = 8^4$  donc  $\text{card}(E_1) = 13^4 - 8^4$ .

Il y a donc 24465 tirages comportant au moins une boule blanche.

Combien y a-t-il de tirages comportant 3 boules noires et une boule blanche dans cet ordre?

Notons  $E_2$  l'ensemble des tirages comportant 3 boules noires et une boule blanche dans cet ordre. Alors  $\text{card}(E_2) = 8^3 \times 5$ .

Il y a donc 2560 tirages comportant 3 boules noires et une boule blanche dans cet ordre.

Combien y a-t-il de tirages comportant au plus une boule noire?

Notons  $E_3$  l'ensemble des tirages comportant au plus une boule noire,  $N_0$  l'ensemble des tirages ne comportant aucune boule noire et  $N_1$  l'ensemble des tirages comportant exactement une boule noire.

Alors  $E_3 = N_0 \cup N_1$ . Or  $N_0 \cap N_1 = \emptyset$  donc  $\text{card}(E_3) = \text{card}(N_0) + \text{card}(N_1)$ . De plus,  $\text{card}(N_0) = 5^4 = 625$  et  $\text{card}(N_1) = (8 \times 5^3) \times 4 = 4000$  (4 places possibles pour l'unique boule noire) donc  $\text{card}(E_3) = 4625$ .

Il y a donc 4625 tirages comportant au plus une boule noire.

Combien y a-t-il de tirages comportant 2 boules noires et 2 boules blanches?

Notons  $E_4$  l'ensemble des tirages comportant 2 boules noires et 2 boules blanches. On obtient donc des tirages de la forme  $NNBB$  ou  $NBNB$  ou  $BBNN \dots$  donc on cherche le nombre d'anagrammes du mot  $NNBB$  :

il y en a  $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ .

On a donc  $\text{card}(E_4) = 8^2 \times 5^2 \times 6 = 9600$ .

Ainsi il y a 9600 tirages comportant 2 boules noires et 2 boules blanches.

### EXERCICE 3

1. Dessiner tous les chemins minimaux de  $A$  à  $B$  possibles. Comment pouvait-on prévoir leur nombre?

Les chemins minimaux de  $A$  à  $B$  sont les anagrammes de  $\vec{j}\vec{i}\vec{j}\vec{i}$ .

Il y a alors  $\frac{4!}{2!2!}$  chemins possibles.

Donc il y a 6 chemins minimaux de  $A$  à  $B$ .

2. (a) Déterminer le nombre de chemins minimaux de  $A$  à  $B$  possibles.

Les chemins minimaux de  $A$  à  $B$  sont les anagrammes de  $\vec{j}\vec{i}\vec{j}\vec{i}\vec{j}\vec{i}\vec{j}\vec{i}$ .

Il y a alors  $\frac{8!}{4!4!}$  chemins possibles. Or  $\frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \times 6 \times 7 \times 8}{24} = 70$ , donc

il y a 70 chemins minimaux de  $A$  à  $B$ .

(b) Déterminer le nombre de chemins passant par  $O$ , centre du quadrillage; puis le nombre de chemins passant par  $P(1;2)$  et enfin le nombre de chemins passant par  $P$  ou  $O$ .

Il y a 6 chemins minimaux de  $A$  à  $B$  et 6 chemins minimaux de  $O$  à  $B$ . Donc il y a 36 chemins minimaux de  $A$  à  $B$  passant par  $O$ .

$\vec{AP} = \vec{i} + 2\vec{j}$ , alors les chemins minimaux de  $A$  à  $P$  sont les anagrammes de  $\vec{i}\vec{j}\vec{j}$ , il y a donc  $\frac{3!}{2!}$  chemins possibles.

$\vec{PB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ , alors les chemins minimaux de  $P$  à  $B$  sont les anagrammes de  $\vec{i}\vec{j}\vec{i}\vec{j}\vec{i}$ , il y a donc  $\frac{5!}{3!2!}$  chemins possibles.

Or  $\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{3!2!} = 3 \times \frac{4 \times 5}{2} = 30$ , donc

il y a 30 chemins minimaux de  $A$  à  $B$  passant par  $P$ .

Il y a 3 chemins minimaux de  $A$  à  $O$ , 1 chemin minimal de  $O$  à  $P$  et 6 chemins minimaux de  $O$  à  $B$ .

Donc il y a  $3 \times 1 \times 6 = 18$  chemins minimaux passant par  $P$  et  $O$ .

Ainsi il y a 48 chemins minimaux de  $A$  à  $B$  passant par  $P$  ou  $O$  ( $36 + 30 - 18 = 48$ ).

### EXERCICE 7

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit 4 voyelles et 6 consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il lance le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- Si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les événements suivants :

$D_1$  : « le dé indique 1 »

$D_2$  : « le dé indique 2 »

$D_3$  : « le dé indique 3 »

$G$  : « la partie est gagnée »

Un joueur a gagné la partie.

Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

Le dé est équilibré donc on est en situation d'équiprobabilité.

$P(D_1) = \frac{1}{6}$  car le dé comporte une seule face numérotée 1.

$P(D_2) = \frac{1}{3}$  car le dé comporte deux faces numérotées 2.

$P(D_3) = \frac{1}{2}$  car le dé comporte trois faces numérotées 3.

$\{D_1, D_2, D_3\}$  est un système complet d'évènements de l'univers de probabilités non nulles donc d'après la formule de Bayès,

$$P_G(D_1) = \frac{P_{D_1}(G) \times p(D_1)}{\sum_{k=1}^3 P_{D_k}(G) \times p(D_k)}.$$

- Si le dé indique 1, le joueur tire une boule de l'urne et gagne si cette boule est une voyelle. Or 4 boules parmi les 10 portent une voyelle et les boules sont indiscernables au toucher donc  $P_{D_1}(G) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ .
- Si le dé indique 2, le joueur tire simultanément deux boules de l'urne et gagne si les deux boules portent une voyelle donc  $P_{D_2}(G) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$ .
- Si le dé indique 3, le joueur tire simultanément trois boules de l'urne et gagne si les trois boules portent une voyelle donc  $P_{D_3}(G) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$ .

$$\text{Ainsi } P_G(D_1) = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \times \frac{1}{2}} = \frac{12}{23}.$$

Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1

avec le dé est de  $\frac{12}{23}$ .

### EXERCICE 10

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0; 1]$ .

Un individu  $I_0$  dispose d'une information binaire (Vrai ou Faux).

Il la transmet à  $I_1$ , qui la transmet à  $I_2, \dots$ , qui la transmet à  $I_n$ .

Chacun transmet l'information reçue (ou son inverse) avec la probabilité  $p$  (ou  $1 - p$ ).

Quelle est la probabilité  $p_n$  pour que  $I_n$  dispose de l'information correcte ?

Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Notons  $V_k$  l'événement : «  $I_k$  apprend l'information initiale correcte », et  $\overline{V}_k$  l'événement contraire.

$\{V_k, \overline{V}_k\}$  est un système complet d'événements de l'univers de probabilités non nulles.

Donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(V_{k+1}) = P_{V_k}(V_{k+1})P(V_k) + P_{\overline{V}_k}(V_{k+1})P(\overline{V}_k).$$

Or  $P_{V_k}(V_{k+1}) = p$  et  $P_{\overline{V}_k}(V_{k+1}) = 1 - p$  donc  $P(V_{k+1}) = (2p - 1)P(V_k) + (1 - p)$ .

La suite  $(p_n = P(V_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique.

On cherche le point fixe qui est  $\frac{1}{2}$ . D'où :

$$p_{k+1} = (2p - 1)p_k + (1 - p) \text{ et } \frac{1}{2} = (2p - 1)\frac{1}{2} + (1 - p) \text{ donc}$$

$$p_{k+1} - \frac{1}{2} = (2p - 1)\left(p_k - \frac{1}{2}\right). \text{ Alors } \forall n \in \mathbb{N}, p_n = (2p - 1)^n \left(p_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Or,  $I_0$  a l'information donc  $p_0 = 1$ . Finalement,  $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^n + \frac{1}{2}$ .

Remarque :  $0 < p < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$ .

### EXERCICE 12

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Un étudiant de prépa décide de faire un footing tous les jours.

Chaque jour, il court une heure, une demi-heure ou pas du tout...

On considère les événements :

$A_n$  : « l'étudiant court une heure le jour  $n$  »,  $B_n$  : « l'étudiant court une demi-heure le jour  $n$  » et  $C_n$  : « l'étudiant ne fait pas de footing le jour  $n$  ».

Soit  $a_n, b_n$  et  $c_n$  les probabilités correspondantes.

Le jour numéro 0, l'étudiant a couru une heure.

On sait par ailleurs qu'un jour donné :

- S'il court une heure ou ne court pas, le lendemain, il court une demi-heure.
- S'il court une demi-heure, le lendemain, il court une heure avec une probabilité de  $\frac{1}{4}$  et il court une demi-heure avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$ .

1. (a) On note  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ . Préciser  $X_0$  et  $X_1$ .

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer une relation de récurrence sur les suites  $(a_n), (b_n)$  et  $(c_n)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $\{A_n, B_n, C_n\}$  est un système complet d'événements de l'univers, alors d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$$

$$\text{d'où } a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4}b_n$$

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1})$$

$$\text{d'où } b_{n+1} = a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1 = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$$

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1})$$

$$\text{d'où } c_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4}b_n.$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n, b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

(c) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$  avec  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  puis que

$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ .

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

En posant,  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ , on obtient  $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ ,

$$\text{avec } A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ .

2. (a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$  puis trouver une relation entre  $A, A^2$  et  $A^3$ .

$$A^2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 12 & 10 & 12 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A.$$

(b) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , il existe un couple de réels  $(u_n, v_n)$  tels que  $A^n = u_n A^2 + v_n A$  et déterminer des relations de récurrence vérifiées par les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Initialisation :  $A^1 = A = 0 \times A^2 + 1 \times A$ , alors  $A^1 = u_1 A^2 + v_1 A$  avec  $u_1 = 0$  et  $v_1 = 1$  donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que la propriété est vraie au rang  $n$  : il existe  $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $A^n = u_n A^2 + v_n A$ .

$$\text{Alors } A^{n+1} = AA^n = A(u_n A^2 + v_n A) = u_n A^3 + v_n A^2 = u_n \left( \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A \right) + v_n A^2 = \left( \frac{1}{2}u_n + v_n \right) A^2 + \frac{1}{2}u_n A.$$

$$\text{D'où } A^{n+1} = u_{n+1} A^2 + v_{n+1} A \text{ avec } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n.$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

Conclusion : Ainsi la propriété est initialisée au rang 1 et héréditaire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 / A^n = u_n A^2 + v_n A.$$

On a alors  $u_1 = 0, v_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n$  et  $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ .

(c) Montrer que la suite  $(u_n + v_n)$  est constante.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n + \frac{1}{2}u_n = u_n + v_n$ , donc

la suite  $(u_n + v_n)$  est constante égale à  $u_1 + v_1 = 1$ .

(d) En déduire que la suite  $(v_n)$  est arithmético-géométrique, puis déterminer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(1 - v_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_n$ , donc la suite  $(v_n)$  est arithmético-géométrique.

Déterminons les termes généraux des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

$$\text{Point fixe de } (v_n) : \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha \iff \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \iff \alpha = \frac{1}{3}.$$

Soit  $(w_n)$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = v_n - \alpha = v_n - \frac{1}{3}$ .

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}v_n = -\frac{1}{2} \left( v_n - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{2}w_n.$$

Donc  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$  et de premier

$$\text{terme } w_1 = v_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

Terme général :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = v_n - \frac{1}{3}$ , donc  $v_n = w_n + \frac{1}{3}$ .

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

$$\text{De plus } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - v_n, \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

(e) Déterminer l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = u_n A^2 + v_n A \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{2}{3} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) A^2 +$$

$$\frac{1}{3} \left( 1 + 2 \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) A.$$

3. Dédurre de l'étude précédente, les expressions de  $a_n, b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ , puis les limites des suites  $(a_n), (b_n)$  et  $(c_n)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  et d'après la question 1.c,  $X_n = A^n X_0$  donc

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{8} u_n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} v_n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ D'où :}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} u_n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{6} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \\ \frac{1}{3} \left( 2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \\ \frac{1}{6} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } n = 0, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \\ \frac{1}{3} \left( 2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \\ \frac{1}{6} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} (1 - (-2)) \\ \frac{1}{3} (2 + (-2)) \\ \frac{1}{6} (1 - (-2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ or } X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc la formule n'est pas valable pour } a_0 \text{ et } c_0.$$

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = c_n = \frac{1}{6} \left( 1 + 2 \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right)$  et  $a_0 = 1, c_0 = 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{2}{3} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

$$\left| -\frac{1}{2} \right| < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2} \right)^n = 0.$$

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{6}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2}{3}$ .