TD 14

OBJECTIFS :

- AN 31-1 : Utiliser les propriétés de l'intégrale pour étudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale.
- AN 31-2 : Calculer la limite d'une somme en utilisant les sommes de Riemann.
- P 32-1 : Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- P 32-2 : Reconnaître et utiliser les lois usuelles.
- P 32-3, 32-4 et 32-5 : Calculer l'espérance, la variance d'une variable aléatoire.
- P 32-6, 32-7 et 32-8 : déterminer les lois d'un couple de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.
- P 32-9 : Etudier une suite de variables aléatoires.

Intégration

EXERCICE 1

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f\in\mathscr{C}\big([a;b],\mathbb{R}\big)$.

1. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=0$. Montrer qu'il existe un réel $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=0$.
2. On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
   Montrer que $\displaystyle\int_a^b \mu\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$ puis qu'il existe un réel $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=\mu$.
3. On pose $a=0$ et $b=1$. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.
   Montrer que f admet un point fixe sur $[0;1]$.

EXERCICE 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par
   $\forall x\in\mathbb{R}^*, g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt.$
   Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par
   $\forall x\in\mathbb{R}^*, g(x)=\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^x f(t)\,dt.$
   Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction g ainsi prolongée est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}\ \text{ et }\ v_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$,
$f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
2. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 mais pas de classe $\mathscr{C}^2$ en 0.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.
4. Etudier le sens de variation de la fonction f.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\,dt$.

1. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, \dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
   En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
2. (a) Montrer que la fonction f ainsi prolongée est dérivable sur $[0;+\infty[$.
   (b) Vérifier que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$ où g est une fonction définie sur $[0;+\infty[$ à déterminer.
3. Etudier les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.
   En déduire le signe de g sur $[0;+\infty[$ puis les variations de f sur $[0;+\infty[$.
4. Justifier que $\forall t \in [0;+\infty[, \dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 6

On considère les fonction ϕ et F définies sur $]0;+\infty[$ par $\forall t \in]0;+\infty[$,
$\phi(t) = \dfrac{1}{t+1-e^{-t}}$ et $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \phi(t)\,dt$.
On note u la fonction $t \mapsto t+1-e^{-t}$ et on admet que u s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en 0.

1. Justifier que la fonction F est bien définie sur $]0;+\infty[$.
2. (a) Montrer que $\forall t \in]0;+\infty[, \dfrac{1}{1+t} \leq \phi(t) \leq \dfrac{1}{t}$.
   (b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
3. L'objectif de cette question est de prolonger par continuité la fonction F en 0.
   On considère la fonction g sur $[0;+\infty[$ par $\forall t \in [0;+\infty[$,
   $$g(t) = \begin{cases} \phi(t) - \dfrac{1}{2t} & \text{si} \quad t > 0 \\ \dfrac{1}{8} & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}.$$
   (a) Montrer que $\phi(t) \underset{t\to 0^+}{=} \dfrac{1}{2t}\left(1 + \dfrac{1}{4}t + o(t)\right)$.
   En déduire que g est continue en 0.
   (b) Justifier l'existence d'une primitive G de g sur $[0;+\infty[$ et montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) = G(2x) - G(x) + \dfrac{1}{2}\ln 2$.
   (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.
   (d) Montrer que la fonction F ainsi prolongée, encore notée F, est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 et préciser $F'(0)$.

EXERCICE 7

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall t \in \mathbb{R}^*, g(t) = \dfrac{sh(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore g la fonction ainsi prolongée.
2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$.
   (a) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) En utilisant un développement limité de g au voisinage de 0, montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.
   (c) Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x \in]0;+\infty[$,
   $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \Big[g(x) - g(t)\Big]\,dt$.
   On admet que g est croissante sur $[0;+\infty[$ et minorée par la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{2}$ sur $[0;+\infty[$.
   (d) Etudier le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
   (e) Etudier la parité de F. En déduire son sens de variation sur $]-\infty;0]$ et sa limite en $-\infty$.

Variables aléatoires

EXERCICE 8

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n \leq N$.
Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, \cdots, N$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard de chaque saut.
Au départ, elle est sur la case 0.
Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce saute d'une seule case au cours des premiers sauts.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. Exprimer X_n en fonction de Y_n et n. En déduire l'espérance et la variance de X_n, donner une interprétation de l'espérance.
   Déterminer la loi de X_n.

EXERCICE 9

On désire analyser le sang d'une population de N individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité p. On a pour cela deux possibilités :

- Soit on analyse le sang de chaque personne;
- soit on regroupe les personnes en groupes de n personnes et on analyse le sang du groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque personne du groupe.

1. En utilisant la deuxième méthode, on note X le nombre de groupes positifs et Y le nombre total d'analyse effectuées.
   (a) Donner la loi de X (on suppose N divisible par n).
   (b) Calculer en fonction de N, n et p l'espérance de Y.
2. Comparer les deux méthodes dans le cas où $N = 1000, n = 10$ et $p = 0,01$.

EXERCICE 10

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à $n, n \in \mathbb{N}^*$.
La boite numérotée k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte et on tire une boule dans cette boîte.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boîte et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe de X et de Y.
2. En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme).
   Déterminer $E(Y)$ puis un équivalent de $E(Y)$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n boîtes numérotées de 1 à n.
La boîte numérotée k, $k \in [\![1, n]\!]$, contient k boules numérotées 1 et $n - k$ boules numérotées 2. On choisit au hasard une boîte et on tire une boule dans cette boîte. Les boules sont indiscernables au toucher.
Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boîte et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule.

1. Préciser la loi de X.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
3. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 12

Une urne contient une boule blanche, une boule verte et n–2 boules rouges ($n \geq 2$). Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise les n boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et Y celle égale au rang du tirage de la boule verte.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois de X et Y.
   Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer les espérances et variances des variables aléatoires X et Y.

EXERCICE 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n, indiscernables au toucher. Un joueur pioche au hasard deux jetons successivement et avec remise dans l'urne.
Soit U la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et D celle égale au deuxième numéro tiré.

1. Donner les lois de U et D. Justifier par une phrase que ces deux variables sont indépendantes.
2. On pose $X = max\{U, D\}$.
   (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $P(U \leq k)$ et $P(D \leq k)$.
   (b) Déterminer $X(\Omega)$.
   (c) Soit $k \in X(\Omega)$. Calculer les probabilités des évènements A et B définis par $A = (U = k, D \leq k)$ et $B = (U \leq k, D = k)$.
   Exprimer l'évènement $(X = k)$ en fonction de A et B.
   En déduire que $P(X = k) = \dfrac{2k-1}{n^2}$.
   (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
3. On pose $Y = min\{U, D\}$.
   (a) Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que si $k > l$ alors $P(X = k, Y = l) = \dfrac{2}{n^2}$.
   Que vaut cette probabilité si $k = l$? si $k < l$?
   (b) En déduire la loi de Y.

EXERCICE 14

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On lance n fois de suite un dé cubique équilibré.
Les lancers sont supposés indépendants.
On considère l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ et on appelle :

- X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus lors des n lancers.
- Y la variable aléatoire égale au rang du premier 6 obtenu.
  Si on n'obtient aucun 6, on pose $Y = 0$.

1. *Loi de* X.
   En la justifiant, déterminer la loi de X.
   Préciser son espérance et sa variance.
2. *Loi de* Y.
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère l'événement S_i : « Obtenir 6 lors du i-ème lancer ».
   (a) Exprimer l'évènement $(Y = 0)$ en fonction des évènements S_i, $i \in [\![1, n]\!]$, puis calculer $P(Y = 0)$.
   (b) De même, calculer $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega) \setminus \{0\}$.

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \cdots, U_n$ telles que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Soit $k \in X(\Omega)$. Si on a obtenu k nombres 6 lors des n lancers, on pioche une boule dans l'urne numéro k.
On appelle Z la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule tirée est blanche et la valeur 0 si la boule tirée est noire.

3. *Loi conjointe du couple* (X, Z).
   Déterminer la loi conjointe du couple (X, Z).
4. *Loi de* Z.
   (a) Calculer $P(Z = 1)$.
   On pourra faire apparaître $E(X)$ *pour simplifier les calculs.*
   (b) En déduire la loi de Z.