



OBJECTIFS :

- AN 29-1 : Connaître parfaitement les développements limités des fonctions usuelles.
- AN 29-2 : Calculer des développements limités de fonctions par opérations algébriques, par composition, par intégration.
- AN 29-3 : Déterminer le développement limité d'une fonction réciproque.
- AN 29-4 : Savoir exploiter un développement limité pour étudier des propriétés locales d'une fonction.
- AN 29-5 : Savoir déterminer une équation d'asymptote oblique à partir d'un développement asymptotique d'une fonction au voisinage de l'infini.
- AL 30-1 : Ecrire la matrice d'une application linéaire relativement aux bases canoniques ou à d'autres bases.
- AL 30-2 : Déterminer analytiquement une application linéaire donnée par sa matrice.
- AL 30-3 et 30-4 : Déterminer et utiliser la matrice de passage pour déterminer la matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base.
- AL 30-5 : Utiliser les matrices semblables.
- AL 30-6 : Déterminer le rang d'une matrice.
- AL 30-7 : Utiliser des matrices pour étudier des suites récurrentes linéaires.

Développements limités

EXERCICE 1

Déterminer les développements limités des fonctions f suivantes au voisinage de 0 :

1. $f : x \mapsto e^x \cos x$, à l'ordre 3.
2. $f : x \mapsto \sin(2x)\sqrt{1+x}$, à l'ordre 3.

3. $f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x) - x}{x^3}$, à l'ordre 3.
4. $f : x \mapsto e^{\sin x}$, à l'ordre 3.
5. $f : x \mapsto \ln(\cos(2x))$ à l'ordre 4.
6. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4.
7. $f : x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 6.
8. $f : x \mapsto \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ à l'ordre 3.
9. $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ à l'ordre 3.
10. $f : x \mapsto \sqrt{3 + \cos x}$ à l'ordre 3.
11. $f : x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ à l'ordre 4.
12. $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ à l'ordre 3.

EXERCICE 2

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de la fonction cosinus.
2. $DL_2(3)$ de la fonction racine carrée.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par $\forall x \in] -1; 1[$, $f(x) = x + \ln(1+x)$.

1. Déterminer un $DL_3(0)$ de la fonction f .
2. Montrer que f réalise une bijection de $] -1; 1[$ sur un intervalle J à déterminer.
3. Montrer que la réciproque f^{-1} admet un $DL_3(0)$.
4. On note $f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ le développement limité de f^{-1} en 0. En exploitant la relation $f^{-1} \circ f = \operatorname{id}_{]-1;1[}$, déterminer le développement limité de f^{-1} en 0.

EXERCICE 4

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^{x^2}$ admet une fonction réciproque définie sur \mathbb{R} et déterminer un $DL_5(0)$ de f^{-1} .

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{\sin(2x)}{\ln(1+x)}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Déterminer un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.
3. (a) Justifier que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
(b) Donner une équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 et déterminer sa position relative par rapport à \mathcal{C} .

EXERCICE 6

1. Déterminer un $DL_2(0)$ de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+3x+x^2}$.
2. En déduire une équation de la tangente au point d'abscisse 0 et la position de la tangente par rapport à la courbe de la fonction f .
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $-\infty$ et la position de cette asymptote par rapport à la courbe de la fonction f .

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $[0; 2\pi[$ par $\forall x \in [0; 2\pi[$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1-\cos x}{2x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ -2\ln 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2\ln 2 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.

2. (a) Justifier que f est continue et dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.
(b) Montrer que f admet un maximum local en 0 et préciser la valeur de ce maximum.
3. Le but de cette question est de montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 en 0.
(a) Justifier la dérivabilité de f sur $]0; 2\pi[$ puis montrer que $\forall x \in]0; 2\pi[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1-\cos x)}$ avec $g: x \mapsto x \sin x + 2 \cos x - 2$.
(b) Conclure.

EXERCICE 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $\forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f_n(0) = 0$.

Soit \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f_n est continue en 0.
2. Montrer que f_n est dérivable en 0. Est-elle de classe \mathcal{C}^1 en 0?
3. (a) Étudier le sens de variation de la fonction f_n .
(b) Calculer la limite de f_n en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n .
4. (a) Montrer que $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
(b) En déduire que la courbe \mathcal{C}_n admet une asymptote oblique Δ_n en $+\infty$ et étudier la position relative de \mathcal{C}_n et Δ_n au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{(x^2+1)\text{Arctan}(x)}{x}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de la fonction f .
2. Déterminer un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f .

3. (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
 Pour la suite, on note encore f la fonction ainsi prolongée.
 Est-elle dérivable en 0? Si oui, préciser $f'(0)$.
- (b) Donner une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 et préciser la position de cette tangente par rapport à \mathcal{C} au voisinage de 0.
4. (a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- (b) Déterminer un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$.
- (c) En déduire que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ et étudier sa position par rapport à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.
- (d) Etudier la branche infinie de \mathcal{C} en $-\infty$.

Représentation matricielle

EXERCICE 10

Ecrire la matrice des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques. Déterminer le noyau et l'image de chacune de ces applications.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, 2y, 3x + y)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x - 5y + 4z$.
3. $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = P - XP'$.
4. $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = (P(-1), P(0), P(1))$.
5. $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X], f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X + 2$. Vérifier que f est bien linéaire.
6. $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 11

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ les applications linéaires définies par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2y + z, y + 2z)$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = (3x + y, x, 2y)$.

Déterminer les matrices de $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 puis les expressions analytiques de $f \circ g$ et $g \circ f$.

EXERCICE 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension n .

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

Ecrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

EXERCICE 13

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $e_1 = (0, 1, 1), e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (1, 1, 0)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 et $\epsilon_1 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

et $\epsilon_2 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ des vecteurs de \mathbb{R}^2 .

1. Déterminer l'expression analytique de l'application f .
2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 et que (ϵ_1, ϵ_2) est une base de \mathbb{R}^2 .
3. Déterminer la matrice de f dans ces nouvelles bases.

EXERCICE 14

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$,
 $f(P) = (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. f est-elle bijective?
4. Déterminer $\text{Ker}(f - 5id)$ où id est l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$.
Calculer $f(1)$, $f(X + 1)$.
5. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 15

On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
 $f(M) = M + 2M^T$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base \mathcal{B} .
4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $f^{-1}(M)$ et en déduire son expression comme combinaison linéaire de M et de M^T .

EXERCICE 16

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique, notée

$$\mathcal{B}, \text{ est } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f .

2. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
3. En déduire une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 adaptée à la somme directe de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
Ecrire la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' .
4. Retrouver la matrice A' en utilisant la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

EXERCICE 17

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^2 dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'expression analytique de l'application f .
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ avec $\epsilon_1 = (i, 2)$ et $\epsilon_2 = (-2i, 1)$ est une base de \mathbb{C}^2 .
3. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 18

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ suivant les valeurs de } a.$$

EXERCICE 19

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

Exprimer alors X_n en fonction de n et X_0 et A .

2. On considère $\mathcal{C} = (u, w)$ une base de \mathbb{R}^2 où $u = (1, 1)$ et $w = (1, 3)$.
Calculer $f(v)$ et $f(w)$ où on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 20

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans

la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note id l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $g = f - 2\text{id}$ et $B = A - 2I_3$.

- f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
- Déterminer le noyau de g puis celui de $g^2 = g \circ g$.
 - $\text{Ker}g$ et $\text{Ker}g^2$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$?
- On pose $U = X + X^2, V = 1 - X$ et $W = X$. Montrer que $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - Déterminer la matrice T de f dans la base \mathcal{B}' et en déduire la matrice N de g dans la base \mathcal{B}' .
- On pose $\text{Com}(f) = \{h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]) / h \circ f = f \circ h\}$.
 - Montrer que $\text{Com}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
 - Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et M' sa matrice dans la base \mathcal{B}' .
Montrer que $h \in \text{Com}(f) \iff M'N = NM'$.
 - En déduire $\text{Com}(f)$.

EXERCICE 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Le but de cette question est de montrer que les matrices A et D sont semblables. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .
 - Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\text{Ker}f, \text{Ker}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}), \text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
 - En déduire une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D$.
 - Conclure.
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On considère les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = & v_n + w_n \\ v_{n+1} = & -2u_n - 3v_n - 5w_n \\ w_{n+1} = & 2u_n + 2v_n + 4w_n \end{cases}$$
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer une relation entre X_{n+1} et X_n puis une relation entre X_n et X_0 .
 - Déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) .