Développements limités.

- Définition d'un DL, changement de variable pour se ramener au voisinage de 0, unicité d'un développement limité sous réserve d'existence.
- Formule de Taylor-Young (DL des fonctions exponentielle, cosinus, sinus, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0).
- Propriétés des DL : lien parité et puissances de x dans la partie régulière d'un DL, troncature d'un développement limité, lien DL avec la continuité et la dérivabilité.
- Opérations sur les DL : Combinaison linéaire, produit, composée (DL du sinus et du cosinus hyperboliques), quotient (développement limité de tangente à l'ordre 3 au voisinage de zéro), intégration (DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de Arctan au voisinage de 0).
- Recherche d'équivalent, calcul de limite, existence et nature d'un extremum en un point, tangente à une courbe en un point et position relative de la courbe et de sa tangente, asymptote et position relative de la courbe par rapport à son asymptote.

Représentation matricielle.

- Définition de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Matrice de l'image d'un vecteur par une application linéaire, matrice d'une composée d'applications linéaires. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dimension de $\mathscr{L}(E,F)$, caractérisation d'un isomorphisme de E dans F si $\dim(E) = \dim(F)$.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Définition du rang d'une matrice, théorème du rang pour les matrices, lien entre rang d'une application linéaire et rang d'une de ses matrices, caractérisation des matrices inversibles en termes de noyau, image et rang, rang de la transposée.
- Matrice de passage d'une base à une autre, lien avec la matrice d'une application linéaire, inversibilité d'une matrice de passage et calcul de son inverse, effet d'un changement de base sur la matrice : d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Intégration.

- Intégrale d'une fonction en escalier : Définitions de la subdivision d'un segment, d'une fonction en escalier, de l'intégrale d'une fonction en escalier, et propriétés.
- Intégrale d'une fonction continue sur un segment : Approximation d'une fonction continue par deux fonctions en escalier, définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment par les fonctions en escalier, interprétation géométrique de l'intégrale comme une aire algébrique. Propriétés de linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles, séparation, intégrale d'une fonction paire, impaire, périodique.

  Sommes de Riemann.
- Intégrale et primitive : Théorème fondamental de l'analyse, lien entre intégrale et primitive.
- Extension aux fonctions à valeurs complexes : Définition à l'aide des parties réelle et imaginaire; les propriétés de linéarité, d'inégalité triangulaire et la relation de Chasles restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes.

Un énoncé au choix à demander :

- ☐ Formule de Taylor-Young.
- ☐ Lien entre continuité et DL, dérivabilité et DL.
- ☐ 2 développements limités au choix du colleur parmi les 11 à connaître (voir encadré sur la dernière page de ce programme). *Le colleur peut demander d'énoncer ces DL à n'importe quel ordre !*
- ☐ Matrice d'une composée d'applications linéaires.
- ☐ Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- ☐ Formule de changement de base pour un endomorphisme.
- ☐ Théorème fondamental de l'analyse.
- ☐ Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- ☐ Propriété de croissance et de positivité de l'intégrale.
- ☐ Relation de Chasles et propriété de séparation pour les intégrales.
- ☐ Inégalité triangulaire et propriété de linéarité pour les intégrales.
- ☐ Donner les deux sommes de Riemann.

Démonstrations :

- ☐ Exercice 6 TD 13.
- ☐ On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X], f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par X^2+X+2.
  - (a) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.
  - (b) Déterminer l'image de f puis le noyau de f.
- ☐ Soit a et b deux réels tels que $a<b$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$.

Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :

TD 13 : exercice 1, exercice 3, exercice 5, exercice 6, exercice 8, exercice 9, exercice 10, exercice 13, exercice 14, exercice 15, exercice 16, exercice 18 matrices A et E, exercice 19, exercice 20, exercice 21.

TD 14 : exercice 1, exercice 2, exercice 3.

Exercices traités en autonomie :

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 13 : exercice 2, exercice 4, exercice 7, exercice 11, exercice 17, exercice 18 matrices B, C, D.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Sont à connaître par coeur les développements limités au voisinage de 0 suivants :

$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

et aussi celui à l'ordre 3 de la fonction tangente : $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$