Représentation matricielle.

- Définition de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Matrice de l'image d'un vecteur par une application linéaire, matrice d'une composée d'applications linéaires. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dimension de $\mathscr{L}(E,F)$, caractérisation d'un isomorphisme de E dans F si $\dim(E) = \dim(F)$.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Définition du rang d'une matrice, théorème du rang pour les matrices, lien entre rang d'une application linéaire et rang d'une de ses matrices, caractérisation des matrices inversibles en termes de noyau, image et rang, rang de la transposée.
- Matrice de passage d'une base à une autre, lien avec la matrice d'une application linéaire, inversibilité d'une matrice de passage et calcul de son inverse, effet d'un changement de base sur la matrice : d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Intégration.

- Intégrale d'une fonction en escalier : Définitions de la subdivision d'un segment, d'une fonction en escalier, de l'intégrale d'une fonction en escalier, et propriétés.
- Intégrale d'une fonction continue sur un segment : Approximation d'une fonction continue par deux fonctions en escalier, définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment par les fonctions en escalier, interprétation géométrique de l'intégrale comme une aire algébrique. Propriétés de linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles, séparation, intégrale d'une fonction paire, impaire, périodique.

  Sommes de Riemann.
- Intégrale et primitive : Théorème fondamental de l'analyse, lien entre intégrale et primitive.
- Extension aux fonctions à valeurs complexes : Définition à l'aide des parties réelle et imaginaire ; les propriétés de linéarité, d'inégalité triangulaire et la relation de Chasles restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes.

Variables aléatoires.

- Définition d'une variable aléatoire sur un univers fini, système complet d'événements associé à une variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, variable aléatoire $f(X)$ avec f une fonction définie sur $X(\Omega)$, variables aléatoires usuelles : v.a. uniforme, v.a. de Bernoulli, v.a. binomiale ; loi conditionnelle.
- Espérance : définition, linéarité, v.a. centrée, inégalité triangulaire, positivité, croissance, espérance d'une v.a. de Bernoulli, espérance d'une v.a. binomiale ; formule de transfert.
- Variance et écart-type : définition, v.a. réduite, variance de $aX + b$, formule de König-Huygens, variance d'une v.a. de Bernoulli, variance d'une v.a. binomiale.
- Couple de variables aléatoires : définition, loi conjointe d'un couple, lois marginales, calcul des lois marginales à partir de la loi conjointe, loi conditionnelle.
- **Uniquement en classe A :** Indépendance de deux variables aléatoires : définition, caractérisation ; variables aléatoires mutuellement indépendantes ; espérance d'un produit de v.a. indépendantes et variance d'une somme de v.a. indépendantes, variable aléatoire comme somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli.

  Définition de la covariance, variance d'une somme de v.a. indépendantes, retour sur la variance d'une v.a. suivant une loi binomiale.

<u>Un énoncé au choix à demander :</u>

☐ Matrice d'une composée d'applications linéaires.

☐ Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.

☐ Formule de changement de base pour un endomorphisme.

☐ Théorème fondamental de l'analyse.

☐ Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

☐ Propriété de croissance et de positivité de l'intégrale.

☐ Relation de Chasles et propriété de séparation pour les intégrales.

☐ Inégalité triangulaire et propriété de linéarité pour les intégrales.

☐ Donner les deux sommes de Riemann.

☐ Définition d'une v.a. de loi uniforme sur un ensemble E fini et non vide, d'une v.a. de Bernoulli.

☐ Définition d'une v.a. binomiale.

☐ Définition de l'espérance, de la variance et de l'écart-type d'une v.a.

☐ Espérance d'une v.a. de Bernoulli, d'une v.a. binomiale.

☐ Formule de transfert.

☐ Formule de König-Huygens.

☐ Variance d'une v.a. de Bernoulli, d'une v.a. binomiale.

<u>Démonstrations :</u>

☐ Soit a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

☐ Exercice 2 question 2 TD 14.

☐ Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale à partir de la définition.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale en considérant la variable aléatoire comme somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

<u>Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :</u>

TD 13 : exercice 1, exercice 3, exercice 5, exercice 6, exercice 8, exercice 9, exercice 10, exercice 13, exercice 14, exercice 15, exercice 16, exercice 18 matrices A et E, exercice 19, exercice 20, exercice 21.

TD 14 : exercice 1, exercice 2, exercice 3.

⚠ Aucun exercice du TD 14 n'a été fait sur les variables aléatoires. Cependant, beaucoup de petits exercices ont été faits en classe. Donc le colleur peut sans problème interroger sur les variables aléatoires en donnant des exercices basiques. Voir dernière page pour des exemples qui ont été faits en classe.

<u>Exercices traités en autonomie :</u>

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 13 : exercice 2, exercice 4, exercice 7, exercice 11, exercice 17, exercice 18 matrices B, C, D.

TD 14 : exercice 4, exercice 5.

EXERCICE 1

Un sac contient 6 jetons : deux numérotés 1, trois numérotés 2 et un numéroté 3. Chaque jeton apparaît avec la même probabilité. On tire simultanément trois jetons. On note X la somme des numéros portés sur les trois jetons. Déterminer la loi de X.

EXERCICE 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la n-liste $(u_1, \dots, u_n)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $u_i = \alpha \times i$.
Cette n-liste définit-elle une loi d'une variable aléatoire réelle ?

EXERCICE 3

Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges.
Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules prises au hasard tombent dans un panier.
Si les trois boules sont rouges, le joueur gagne 100 euros ; si deux des boules sont rouges, il gagne 15 euros.
Si une seule est rouge, il gagne un lot de 5 euros. Le prix du jeton est fixé à 8 euros.

1. Soit X la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur.
   Déterminer la loi de X, et calculer son espérance. En déduire le gain moyen du forain.
2. L'appareil ne s'avérant pas suffisamment rentable, le forain envisage deux solutions : augmenter de 1 euro le prix du jeton ou bien ajouter une boule blanche dans l'urne. Quelle est la solution la plus rentable pour le forain ?

EXERCICE 4

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.
On tire successivement 2 boules. On note X la variable aléatoire définie par $X = 0$ si la première boule est noire et $X = 1$ si elle est blanche. On définit Y de la même façon pour la deuxième boule.

1. On effectue les tirages avec remise. Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales de X et Y. Déterminer la loi de X conditionnée par Y ainsi que la loi de Y conditionnée par X.
2. Mêmes questions pour un tirage sans remise.