TD 14

Eléments de correction

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

La fonction $g: t\mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

De plus, $\forall x\in]0;1[, x^2\in]0;1[$ et $\forall x\in]1;+\infty[, x^2\in]1;+\infty[$, donc f est bien définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Soit $x\in]0;1[$, alors $x^2<x$. Soit $t\in\left[x^2;x\right]$, alors $\ln x^2\leq \ln t\leq \ln x<0$.

Donc $\dfrac{1}{\ln x}\leq\dfrac{1}{\ln t}\leq\dfrac{1}{2\ln x}$.

Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{dt}{\ln x}\leq\int_{x^2}^{x}\frac{dt}{\ln t}\leq\int_{x^2}^{x}\frac{dt}{2\ln x}$, donc

$\dfrac{x^2-x}{2\ln x}\leq f(x)\leq\dfrac{x^2-x}{\ln x}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(x^2-x\right)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{\ln x}=0$, alors d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=0\in\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0)=0}$.

$\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[, f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=\int_x^{x^2}\frac{t\,dt}{t\ln t}$.

Soit $x\in]0;1[$ et $t\in\left[x^2;x\right]$, alors $t\ln t<0$, donc $\dfrac{x}{t\ln t}\leq\dfrac{t}{t\ln t}\leq\dfrac{x^2}{t\ln t}$.

Or $x^2<x$, donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{x\,dt}{t\ln t}\leq\int_{x^2}^{x}\frac{t\,dt}{t\ln t}\leq\int_{x^2}^{x}\frac{x^2dt}{t\ln t}$.

D'où $x^2\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}\leq f(x)\leq x\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}$.

Or $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}=[\ln|\ln t|]_x^{x^2}=\ln|2\ln x|-\ln|\ln x|=\ln 2$, donc

$x^2\ln 2\leq f(x)\leq x\ln 2$.

Alors d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=\ln 2$.

On obtient le même encadrement si $x\in]1;+\infty[$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to1^+}f(x)=\ln 2$.

D'où $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=\ln 2\in\mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 1 en posant } f(1)=\ln 2}$.

2. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 mais pas de classe $\mathscr{C}^2$ en 0.

Soit G une primitive de g sur $]0;1[$, alors $\forall x\in]0;1[, f(x)=G(x^2)-G(x)$.

La fonction carré est dérivable sur $]0;1[$, à valeurs dans $]0;1[$ et la fonction G est dérivable sur $]0;1[$, alors par composée la fonction $x\mapsto G\left(x^2\right)$ est dérivable sur $]0;1[$. Donc par différence, f est dérivable sur $]0;1[$.

Soit $x\in]0;1[, f'(x)=2xg(x^2)-g(x)=\dfrac{2x}{\ln x^2}-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{x-1}{\ln x}$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{\ln x}=0\in\mathbb{R}$.

Alors d'après le théorème de la limite de la dérivée, la fonction f prolongée en 0 est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 et $f'(0)=0$.

Soit $x\in]0;1[, f''(x)=\dfrac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x-1}{x(\ln x)^2}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x(\ln x)^2=0^+$, alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f''(x)=+\infty$.

Alors d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=+\infty$, donc la fonction f' n'est pas dérivable en 0. Alors f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ prolongée en 0 n'est pas de classe } \mathscr{C}^2 \text{ en 0}}$.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.

$\forall x \in]1;+\infty[, x^2\ln 2 \leq f(x)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln 2 = +\infty$, donc d'après le théorème de divergence par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

$\forall x \in]1;+\infty[, x\ln 2 \leq \dfrac{f(x)}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln 2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Alors $\boxed{\mathscr{C} \text{ admet une branche parabolique de direction asymptotique verticale en } +\infty}$.

4. Etudier le sens de variation de la fonction f.

f est dérivable sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

$\forall x \in]0;1[, x-1<0$ et $\ln x < 0$ d'où $f'(x)>0$.

$\forall x \in]1;+\infty[, x-1>0$ et $\ln x > 0$ d'où $f'(x)>0$.

Donc f est croissante sur chacun de ces intervalles.

Alors, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ prolongée en 0 et en 1 est croissante sur } [0;+\infty[}$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}dt$.

1. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, \dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

Soit $x \in]0;+\infty[$ et $t \in [0;x]$.

Alors $0 \leq t \leq x$ et donc $2 \leq e^t+1 \leq e^x+1$.

D'où $\dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{e^t+1} \leq \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{t}{e^x+1} \leq \dfrac{t}{e^t+1} \leq \dfrac{t}{2}$.

Or $0<x$, donc par croissance de l'intégrale,

$\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^x+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \dfrac{t}{2}\,\mathrm{d}t$.

D'où $\dfrac{1}{e^x+1}\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{2}\int_0^x t\,\mathrm{d}t$.

De plus $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}x^2$, donc $\dfrac{1}{e^x+1}\times\dfrac{1}{2}x^2 \leq \displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}dt \leq \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}x^2$.

Alors $\dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}dt \leq \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, \dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}}$.

Prolongement de f par continuité en 0 :

$\forall x \in]0;+\infty[, \dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1}{2}$, donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = \dfrac{1}{2}}$.

2. (a) Montrer que la fonction f ainsi prolongée est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Soit $h : t \mapsto \dfrac{t}{e^t+1}$.

La fonction h est continue sur $[0;+\infty[$, elle admet donc des primitives.

Soit H la primitive de h sur $[0;+\infty[$ s'annulant en 0.

Alors $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \dfrac{2}{x^2}H(x)$.

Or H est dérivable $[0;+\infty[$ (car c'est une primitive de h) et $x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc par produit $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[}$.

Dérivabilité en 0 :

Soit $t \in [0;+\infty[, h(t) = \dfrac{t}{e^t+1} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t}{2+t+o(t)} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t}{2\left(1+\frac{t}{2}+o(t)\right)} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t}{2}\left(1-\dfrac{t}{2}+o(t)\right) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{4}+o\left(t^2\right)$.

Soit $x \in]0;+\infty[$,

$f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} \dfrac{2}{x^2}\left(\int_0^x\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{4}\right)\mathrm{d}t+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{2}{x^2}\left[\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{t^3}{12}\right]_0^x + o(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}x+o(x)$.

Alors f admet un $DL_1(0)$, donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0}}$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$.

(b) Vérifier que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -\dfrac{4}{x^3} g(x)$ où g est une fonction définie sur $[0;+\infty[$ à déterminer.

Soit $x \in]0;+\infty[, f(x) = \dfrac{2}{x^2} H(x)$, donc $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3} H(x) + \dfrac{2}{x^2} h(x) = -\dfrac{4}{x^3}\left(H(x) - \dfrac{1}{2} x h(x)\right)$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -\dfrac{4}{x^3} g(x) \text{ avec } g(x) = H(x) - \dfrac{1}{2} x h(x)}$.

3. Etudier les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.
En déduire le signe de g sur $[0;+\infty[$ puis les variations de f sur $[0;+\infty[$.

H est dérivable $[0;+\infty[$ et h est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient de telles fonctions. Donc g est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Soit $x \in [0;+\infty[$.

$g'(x) = h(x) - \dfrac{1}{2} h(x) - \dfrac{1}{2} x h'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+e^x} - x \dfrac{1+e^x - xe^x}{(1+e^x)^2}\right) = \dfrac{x(1+e^x-1-e^x+xe^x)}{2(1+e^x)^2} = \dfrac{x^2 e^x}{2(1+e^x)^2}$ et $\dfrac{x^2 e^x}{2(1+e^x)^2} > 0$.

Donc $\boxed{g \text{ est croissante sur } [0;+\infty[}$.

De plus, $g(0) = H(0) = 0$ donc $\boxed{g \text{ est positive sur } [0;+\infty[}$.

Variations de f sur $[0;+\infty[$: $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -\dfrac{4}{x^3} g(x)$.

Or $\forall x \in]0;+\infty[, -\dfrac{4}{x^3} < 0$ et $g(x) \geq 0$, donc $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) \leq 0$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0;+\infty[}$.

4. Justifier que $\forall t \in [0;+\infty[, \dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Soit φ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\forall t \in [0;+\infty[, \varphi(t) = e^t + 1 - t$.
On montre que φ est croissante sur $[0;+\infty[$ et comme $\varphi(0) = 0$,
on en déduit que φ est positive sur $0;+\infty[$ et donc $\forall t \in [0;+\infty[, e^t + 1 \geq t$.

Ainsi, $\boxed{\forall t \in [0;+\infty[, \dfrac{t}{e^t+1} \leq 1}$.

Limite de f en $+\infty$:
Soit $x \in]0;+\infty[$, alors $0 < x$.
De plus, $\forall t \in [0;+\infty[, 0 \leq \dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$ donc par croissance de l'intégrale,
$0 \leq \displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\,\mathrm{d}t$. D'où $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t$.
Or $\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t = \dfrac{2}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, donc par encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 14

1. Le lancer du dé est une expérience à deux issues : obtenir 6 ou non.
C'est donc une épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir 6" a pour probabilité $\dfrac{1}{6}$.
Cette épreuve est répétée n fois de manière identique et indépendante.
X est donc la variable aléatoire égale au nombre de succès.
Alors $\boxed{X \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{6}\right)}$. Donc $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{6} n \text{ et } V(X) = \dfrac{5}{36} n}$.

2. (a) L'événement $(Y = 0)$ est réalisé lorsqu'on n'obtient aucun 6 au cours des n lancers, donc $\boxed{(Y=0) = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}}$.
Les lancers étant indépendants, les événements S_i, $i \in [\![1;n]\!]$, donc les événements $\overline{S_i}$, $i \in [\![1;n]\!]$, sont indépendants.
Alors $P(Y=0) = P\left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}\right) = P\left(\overline{S_1}\right) \ldots P\left(\overline{S_n}\right) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
Donc $\boxed{P(Y=0) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$.

(b) $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
* Si $k = 1, P(Y=1) = P(S_1) = \dfrac{1}{6}$.

* Si $k \neq 1$, alors $P(Y=k) = P\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\ldots\cap\overline{S_{k-1}}\cap S_k\right) = P\left(\overline{S_1}\right)\ldots P\left(\overline{S_{k-1}}\right)P\left(S_k\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}$.

Donc $\boxed{\forall k\in[\![1;n]\!], P(Y=k)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}$.

3. $(X,Z)(\Omega)=[\![0;n]\!]\times\{0;1\}$. Soit $k\in[\![0;n]\!]$.
   $P(X=k,Z=1)=P(X=k)\times P_{(X=k)}(Z=1)$.
   Or $P_{(X=k)}(Z=1)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne U_k. Donc $P_{(X=k)}(Z=1)=\frac{k}{n}$.
   De plus, $P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$, donc
   $\boxed{P(X=k,Z=1)=\frac{k}{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}}$.
   De même, $\boxed{P(X=k,Z=0)=\frac{n-k}{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}}$.

4. (a) $P(Z=1)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Z=1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}\times\frac{n}{6}=\frac{1}{6}$.
   Donc $\boxed{P(Z=1)=\frac{1}{6}}$.

   (b) $Z(\Omega)=\{0;1\}$ donc $\boxed{Z \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{6}}$.