Thème : Géométrie.

TD 15

OBJECTIFS :

- G 33-1 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan.
- G 33-2 : Déterminer une représentation paramétrique d'un plan.
- G 33-3 : Déterminer une équation cartésienne d'une droite.
- G 33-4 : Déterminer une représentation paramétrique d'une droite.
- G 33-8 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan.
- G 33-9 : Déterminer une équation cartésienne d'une sphère en repère orthonormé.
- AL 34-1 : Déterminer si une application linéaire est un projecteur, une symétrie.
- AL 34-2, 34-3 : Déterminer les éléments caractéristiques d'une projection, d'une symétrie.
- AL 34-4, 34-5 : Déterminer la matrice d'une projection, d'une symétrie dans une base.

Géométrie dans l'espace

Dans toute cette partie, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

EXERCICE 1

On considère $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x+2y-3z+4=0$ et $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;1;1)$ trois points de l'espace.

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ passant par ces points.
2. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations cartésiennes est : $\begin{cases} x &= y+1 \\ z &= y \end{cases}$.

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathscr{D}$ et passant par $A(1;1;1)$.

EXERCICE 3

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $A(1,1,4)$ sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x-y+2z=2$, puis calculer la distance $d(A,\mathscr{P})$.

EXERCICE 4

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par les points $A(-1;1;0); B(2;0;1)$ et parallèle à la droite $\mathscr{D} : \begin{cases} x-y+z+3=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ contenant la droite $\mathscr{D}$ et parallèle à la droite $\mathscr{D}'$ avec $\mathscr{D} : \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}' : \begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

EXERCICE 5

Montrer que les deux droites suivantes sont coplanaires et former une équation cartésienne de leur plan.

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x=2z+1 \\ y=z-1 \end{cases} \qquad \mathscr{D}' : \begin{cases} x=z+2 \\ y=3z-3 \end{cases}$$

EXERCICE 6

Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble $\mathscr{P}_m$ par son équation cartésienne dans $\mathscr{R}$: $\left(4+m^2\right)x+\left(4-m^2\right)y-4mz=m+8$.

On note le point $\Omega_0=\left(0,1,-\dfrac{1}{4}\right)$ et Δ la droite passant par Ω_0 et dirigée par $\vec{i}$.

1. Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}, \mathscr{P}_m$ est un plan.
2. Soit Ω_x le point de Δ dont la première coordonnée vaut x.

   Montrer que la distance entre Ω_x et $\mathscr{P}_m$ vaut $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{2}}$.

   Qu'y a-t-il de remarquable dans ce résultat ?
3. Déterminer toutes les sphères de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dont le centre appartient à Δ et telles que, pour tout $m \in \mathbb{R}, \mathscr{P}_m$ soit tangent à ces sphères.

   On notera $\mathscr{S}_1$ celle dont le centre a la première coordonnée la plus petite. Déterminer le centre de $\mathscr{S}_1$ et son équation cartésienne.

EXERCICE 7

1. Trouver deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x-y+3z-1=0$ puis donner un système d'équations paramétriques de ce plan.
2. Trouver un vecteur directeur, puis une représentation paramétrique, de la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations cartésiennes est : $\begin{cases} 2x+y-4z &= 6 \\ x-y+3z &= 2 \end{cases}$.

EXERCICE 8

Soit $\Omega(4;1;2)$ et $A(-1;1;2)$ deux points de l'espace.

1. Déterminer une équation de la sphère de centre Ω et passant par A.
2. Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x-2y-4z=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ est un cercle dont on précisera le rayon r et le centre w.

EXERCICE 9

On considère les points $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,1)$ et $C(1,1,-1)$.

On note Δ_1 la droite $(AB), \Delta_2$ celle d'équations cartésiennes $x+y+z=y-z+1=0$ et Δ_3 la droite passant par C et dirigée par $\vec{u}_3(1,1,1)$.

1. (a) Donner une représentation paramétrique de Δ_2.

   (b) Donner un système d'équations cartésiennes de Δ_1 et Δ_3.

   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. (a) Vérifier que les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas coplanaires.

   (b) Soit Δ la droite d'équations $x+y-2z+2=y-z+1=0$.

   Montrer que Δ coupe Δ_1 et Δ_2 perpendiculairement.
3. Soit Σ la sphère passant par A,B,C et tangente à Δ_3.

   On note $\Omega(a,b,c)$ son centre et $R \geq 0$ son rayon.

   (a) Montrer que A,B et C sont sur la sphère si et seulement si $a=b=c$ et $3a^2-2a-R^2+3=0$.

   (b) À l'aide de la condition de tangence, en déduire que $R=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$. Conclure.

   Indication : La distance d'un point M à une droite $\mathscr{D}$ peut se calculer avec un produit vectoriel et un vecteur directeur :

   $d(M,\mathscr{D})=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$ où A est un point de $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Projections et symétries

EXERCICE 10

Les trois questions sont indépendantes.

1. On rappelle que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \bigoplus \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.
   Déterminer l'expression de la symétrie s par rapport à $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.
2. On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}-$espace vectoriel et f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{i}{2}\overline{z}$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
   (b) Déterminer $f \circ f$. En déduire la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$,
   $f(P) = (1-X)P(0) + XP(1)$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 11

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$,
$f(P) = P + \left(\dfrac{1}{2}P''(0)\right)(X - X^2)$.

1. Montrer que $f(X - X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.
2. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. f est-elle un projecteur ou une symétrie ? Déterminer ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 13

On considère $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 5z = 0\right\}$ et $G = \left\{(a, 2a, a), a \in \mathbb{R}\right\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans une base $\mathscr{B}'$ adaptée à la somme $F \bigoplus G$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.