

Représentation matricielle.

- Définition de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Matrice de l'image d'un vecteur par une application linéaire, matrice d'une composée d'applications linéaires. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$, caractérisation d'un isomorphisme de E dans F si $\dim(E) = \dim(F)$.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Définition du rang d'une matrice, théorème du rang pour les matrices, lien entre rang d'une application linéaire et rang d'une de ses matrices, caractérisation des matrices inversibles en termes de noyau, image et rang, rang de la transposée.
- Matrice de passage d'une base à une autre, lien avec la matrice d'une application linéaire, inversibilité d'une matrice de passage et calcul de son inverse, effet d'un changement de base sur la matrice : d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Intégration.

- Intégrale d'une fonction en escalier : Définitions de la subdivision d'un segment, d'une fonction en escalier, de l'intégrale d'une fonction en escalier, et propriétés.
- Intégrale d'une fonction continue sur un segment : Approximation d'une fonction continue par deux fonctions en escalier, définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment par les fonctions en escalier, interprétation géométrique de l'intégrale comme une aire algébrique. Propriétés de linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles, séparation, intégrale d'une fonction paire, impaire, périodique.
Sommes de Riemann.
- Intégrale et primitive : Théorème fondamental de l'analyse, lien entre intégrale et primitive.
- Extension aux fonctions à valeurs complexes : Définition à l'aide des parties réelle et imaginaire ; les propriétés de linéarité, d'inégalité triangulaire et la relation de Chasles restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes.

Variables aléatoires.

- Définition d'une variable aléatoire sur un univers fini, système complet d'événements associé à une variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, variable aléatoire $f(X)$ avec f une fonction définie sur $X(\Omega)$, variables aléatoires usuelles : v.a. uniforme, v.a. de Bernoulli, v.a. binomiale ; loi conditionnelle.
- Espérance : définition, linéarité, v.a. centrée, inégalité triangulaire, positivité, croissance, espérance d'une v.a. de Bernoulli, espérance d'une v.a. binomiale ; formule de transfert.
- Variance et écart-type : définition, v.a. réduite, variance de $aX + b$, formule de König-Huygens, variance d'une v.a. de Bernoulli, variance d'une v.a. binomiale.
- Couple de variables aléatoires : définition, loi conjointe d'un couple, lois marginales, calcul des lois marginales à partir de la loi conjointe, loi conditionnelle.
- Indépendance de deux variables aléatoires : définition, caractérisation ; variables aléatoires mutuellement indépendantes ; espérance d'un produit de v.a. indépendantes et variance d'une somme de v.a. indépendantes, variable aléatoire comme somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli.
Définition de la covariance, variance d'une somme de v.a. indépendantes, retour sur la variance d'une v.a. suivant une loi binomiale.

Projection et symétrie.

- Projection et symétrie : définition, propriétés et caractérisation.

Géométrie dans l'espace.

- Définitions vecteurs coplanaires, base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$, d'un repère cartésien de \mathcal{E} , d'un repère et d'une base orthogonale, d'un repère et d'une base orthonormaux, coordonnées cartésiennes d'un point et d'un vecteur, propriétés de calcul.
- Produit scalaire : définition, propriétés, expression dans une base orthonormale.
- Produit vectoriel : orientation de l'espace, définition du produit vectoriel, interprétation géométrique de sa norme, propriétés algébriques, expression dans une base orthonormée directe.
- Produit mixte : définition, interprétation géométrique de sa valeur absolue, expression dans une base orthonormée directe, propriétés algébriques, condition de coplanarité.
- Droites et plans : représentations paramétriques, équations cartésiennes de plan, positions relatives de deux plans.

Aucun exercice du TD n'a été fait mais beaucoup d'exemples et d'exercices de base ont été fait en cours.

Un énoncé au choix à demander :

- Matrice d'une composée d'applications linéaires.
- Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Formule de changement de base pour un endomorphisme.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- Propriété de croissance et de positivité de l'intégrale.
- Relation de Chasles et propriété de séparation pour les intégrales.
- Inégalité triangulaire et propriété de linéarité pour les intégrales.
- Donner les deux sommes de Riemann.
- Définition d'une v.a. de loi uniforme sur un ensemble E fini et non vide, d'une v.a. de Bernoulli.
- Définition d'une v.a. binomiale.
- Définition de l'espérance, de la variance et de l'écart-type d'une v.a.
- Espérance d'une v.a. de Bernoulli, d'une v.a. binomiale.
- Formule de transfert.
- Formule de König-Huygens.
- Variance d'une v.a. de Bernoulli, d'une v.a. binomiale.
- Définition d'une projection et caractérisation.
- Définition d'une symétrie et caractérisation.
- Définition du produit scalaire, expression dans une base orthonormale.
- Définition du produit vectoriel, expression dans une base orthonormée.
- Définition du produit vectoriel, expression dans une base orthonormée directe.
- Définition du produit mixte, expression dans une base orthonormée directe.
- Calcul de l'aire d'un parallélogramme avec le produit vectoriel, calcul du volume d'un parallélépipède avec le produit mixte.

Démonstrations :

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
Montrer que : $(\forall z \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G / z = x + y) \iff F \cap G = \{0_E\}$.
- Caractérisation d'une racine d'un polynôme.
- Image d'un intervalle par une fonction continue.
- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.
L'application $P_A : B \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une probabilité sur Ω .
- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.

**Remarque :**

*Ces démonstrations ont déjà été apprises au cours du semestre! Elles sont au programme des oraux du 6 juin.
Le colleur en demandera une seule par étudiant comme d'habitude.*

Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :

TD 13 : exercice 10, exercice 13, exercice 14, exercice 15, exercice 16, exercice 18 matrices A et E, exercice 19, exercice 20, exercice 21.

TD 14 : exercice 1, exercice 2, exercice 3, exercice 6, exercice 7, exercice 8, exercice 9, exercice 10, exercice 11, exercice 12, exercice 13.

TD 15 : exercices 10 à 13.

Le programme sera peut-être ajusté vendredi soir!

Exercices traités en autonomie :

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 13 : exercice 11, exercice 17, exercice 18 matrices B, C, D.

TD 14 : exercice 4, exercice 5, exercice 14.