

Cahier de vacances mathématiques
Éléments de correction fiches 1 à 5

Lycée Ozanam – Site Icam Lille

2026 - 2027

C. HÉDIN



1.
 - $A \in \mathbb{D}$
 - $B \in \mathbb{R}$
 - $C \in \mathbb{Z}$
 - $D \in \mathbb{N}$
 - $E \in \mathbb{D}$
 - $F \in \mathbb{Q}$
 - $G \in \mathbb{Q}$
 - $H \in \mathbb{R}$
 - $I \in \mathbb{Z}$
 - $J \in \mathbb{N}$

2. **Encadrement de $2a - b$:**



On ne peut pas faire la différence de deux inégalités, il faut utiliser l'opposé.

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ alors $1 \leq 2a \leq 2$. De plus, $3 \leq b \leq 4$ donc $-4 \leq -b \leq -3$. Alors, en sommant, $-3 \leq 2a - b \leq -1$.

Encadrement de $\frac{4a-1}{b+1}$:



On ne peut pas diviser deux inégalités, il faut utiliser l'inverse.

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ alors $2 \leq 4a \leq 4$. D'où $1 \leq 4a - 1 \leq 3$. De plus, $3 \leq b \leq 4$. Alors $0 < 4 \leq b + 1 \leq 5$ d'où $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{b+1} \leq \frac{1}{4}$.

Toutes les quantités sont positives, on peut donc multiplier membre à membre.

Donc par produit, $\frac{1}{5} \leq \frac{4a-1}{b+1} \leq \frac{3}{4}$.

1. • $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{4 \times 9}{5 \times 5} \times \frac{5 \times 3}{4 \times 3} \times 5 = 9$ donc $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = 9$.

• $-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{5 \times 3} \times \frac{5}{2 \times 3} = \frac{1}{9}$ donc $-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{9}$.

•
$$\begin{aligned} \frac{1978 \times 1979 + 1980 \times 21 + 1958}{1980 \times 1979 - 1978 \times 1979} &= \frac{1978 \times 1979 + 1979 \times 21 + 21 + 1958}{1979 \times (1980 - 1978)} \\ &= \frac{1979 \times (1978 + 21) + 1979}{1979 \times 2} \\ &= \frac{1979 \times (1999 + 1)}{1979 \times 2} \\ &= 1000 \end{aligned}$$

Donc $\frac{1978 \times 1979 + 1980 \times 21 + 1958}{1980 \times 1979 - 1978 \times 1979} = 1000$.

• $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$

Donc $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{13}{8}$.

• $\frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \div \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} \div \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{56}} = \left(\frac{1}{2} \times 12\right) \div \left(\frac{1}{30} \times 56\right) = 6 \times \frac{30}{56} = 3 \times 2 \times \frac{15}{2 \times 14} = \frac{45}{14}$

Donc $\frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \div \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} \div \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{56}} = \frac{45}{14}$.

2. • $\frac{2022}{(-2022)^2 - 2021 \times 2023} = \frac{2022}{2022^2 - (2022 - 1) \times (2022 + 1)} = \frac{2022}{2022^2 - (2022^2 - 1)} = 2022$

Donc $\frac{2022}{(-2022)^2 - 2021 \times 2023} = 2022$.

• $\frac{2021^2}{2020^2 + 2022^2 - 2} = \frac{2021^2}{(2021 + 1)^2 + (2021 - 1)^2 - 2} = \frac{2021^2}{2021^2 + 2 \times 2021 + 1 + 2021^2 - 2 \times 2021 + 1 - 2} = \frac{2021^2}{2 \times 2021^2} = \frac{1}{2}$

Donc $\frac{2021^2}{2020^2 + 2022^2 - 2} = \frac{1}{2}$.

3.

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \times \left(-\frac{6}{11}\right) + \frac{\frac{6}{11} + 3}{4}}{\frac{5}{408} \times \left(-\frac{6}{11}\right) + \frac{\frac{6}{11} + 2}{544}} &= \frac{-\frac{12}{11} + \frac{39}{4}}{\frac{5}{6 \times 68} \times \left(-\frac{6}{11}\right) + \frac{\frac{28}{11}}{544}} \\
 &= \frac{-\frac{12}{11} + \frac{39}{44}}{-\frac{5}{11 \times 68} + \frac{4 \times 7}{11} \times \frac{1}{4 \times 2 \times 68}} \\
 &= \frac{-\frac{48}{44} + \frac{39}{44}}{-\frac{5}{11 \times 68} + \frac{7}{11 \times 2 \times 68}} \\
 &= \frac{-\frac{9}{11 \times 4}}{-\frac{10}{11 \times 2 \times 68} + \frac{7}{11 \times 2 \times 68}} \\
 &= \frac{-\frac{11 \times 4}{3}}{-\frac{11 \times 2 \times 68}{9} \times \frac{11 \times 4 \times 34}{3}} \\
 &= \frac{11 \times 4}{3 \times 34} \\
 &= 102.
 \end{aligned}$$

Mémé a 102 ans.

- 4.
- $A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ donc $A = \frac{ad}{bc}$.
 - $B = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c} \times \frac{d}{c}} = \frac{a}{b \times \frac{d}{c}} = \frac{a}{\frac{bd}{c}} = a \times \frac{c}{bd} = \frac{ac}{bd}$ donc $B = \frac{ac}{bd}$.
 - $C = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times \frac{c}{b}}{d} = \frac{\frac{ac}{b}}{d} = \frac{ac}{bd}$ donc $C = \frac{ac}{bd}$.
 - $D = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{1}{c}}{d} = \frac{\frac{a}{bc}}{d} = \frac{a}{bcd}$ donc $D = \frac{a}{bcd}$.
- 5.
- $\frac{k}{k-1} = \frac{k-1+1}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}$ donc $\frac{k}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}$.
 - $\frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}$ donc $\frac{3x-1}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}$.



1. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A(n) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}$.
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, A(n) = -\frac{1}{n(n+1)^2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $B(n) = \frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2(n-1))} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2(n+1)} = \frac{3n}{2}$.
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, B(n) = \frac{3n}{2}$.
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $C(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2+2x}{x^2-1} = \frac{2}{x-1}$.
- Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, C(x) = \frac{2}{x-1}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $D(x) = \frac{x-2}{2x} - \frac{1}{6} + \frac{3-x}{3x} = \frac{3(x-2)}{6x} - \frac{x}{6x} + \frac{2(3-x)}{6x} = 0$.
- Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, D(x) = 0$.
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$, $E(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{x(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)}$
- $E(x) = \frac{x^2-4+x^2+2x+2x+4}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2x(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x-2}$.
- Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}, E(x) = \frac{2}{x-2}$.
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, $F(x) = \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{-x}{1-x}} = -\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x^2}{x^2-1}$.
- Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}, F(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

2. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette équation.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} 3x + 1 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -\frac{1}{3} \\ x \neq -2 \end{cases}. \text{ Alors } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}; -2 \right\}.$$

Soit $x \in \mathcal{D}$,

$$\frac{3x+2}{3x+1} = \frac{x-1}{x+2} \iff (3x+2)(x+2) = (3x+1)(x-1) \iff 3x^2+6x+2x+4 = 3x^2-3x+x-1 \iff 10x = -5 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1}{2} \in \mathcal{D} \text{ donc } \mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

3. • On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D} \iff 2x + 1 \neq 0 \iff x \neq -\frac{1}{2}$. Alors $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

On dresse un tableau de signes pour résoudre cette inéquation :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$	
Signe de $x - 4$	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
Signe de $2x + 1$	$-$		$-$	0	$+$	
Signe du quotient	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Donc $\mathcal{S} =]-1; -\frac{1}{2}[\cup]4; +\infty[$.

- On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D} \iff 2 - x \neq 0 \iff x \neq 2$. Alors $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Soit $x \in \mathcal{D}$, $\frac{x-3}{2-x} \leq 2 \iff \frac{x-3-2(2-x)}{2-x} \leq 0 \iff \frac{3x-7}{2-x} \leq 0$

On dresse un tableau de signes pour résoudre cette inéquation :

x	$-\infty$	2	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
Signe de $3x-7$	-	-	0	+
Signe de $2-x$	+	0	-	-
Signe du quotient	-	+	0	-

Donc $\mathcal{S} =]-\infty; 2[\cup \left[\frac{7}{3}; +\infty[$.



- $\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$
- $\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$
- $\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$

1. • $\frac{(10^5 \times 10^{-3})^5}{(10^{-5} \times 10^3)^{-3}} = \frac{(10^2)^5}{(10^{-2})^{-3}} = \frac{10^{10}}{10^6} = 10^4$ donc $\frac{(10^5 \times 10^{-3})^5}{(10^{-5} \times 10^3)^{-3}} = 10^4$.
- $\frac{30^{28}}{2^{28} \times 5^{28}} = \frac{30^{28}}{10^{28}} = \left(\frac{30}{10}\right)^{28} = 3^{28}$ donc $\frac{30^{28}}{2^{28} \times 5^{28}} = 3^{28}$.
2. • $\frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}} = \frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 2^{-1} \times 3^{-1}} = 2^{3-8+1} \times 3^{2-4+1} = 2^{-4} \times 3^{-1}$ donc $\frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}} = 2^{-4} \times 3^{-1}$.
- $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{3^{21}(3+1)}{3^{21}(3-1)} = 2$ donc $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = 2$.
3. • $\frac{8^3}{4^2} = \frac{4^3 \times 2^3}{4^2} = 4 \times 2^3 = 2^2 \times 2^3 = 2^5$ donc $\frac{8^3}{4^2} = 2^5$.
- $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{3^{-3} \times 2^4}{3^{-4} \times 2^4} = 3^{-3+4} = 3$ donc $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = 3$.
- $\frac{8^{17} \times 6^{-6}}{9^{-3} \times 2^{42}} = \frac{(2^3)^{17} \times 2^{-6} \times 3^{-6}}{(3^2)^{-3} \times 2^{42}} = \frac{2^{51} \times 2^{-6} \times 3^{-6}}{3^{-6} \times 2^{42}} = 2^{51-6-42} = 2^3$ donc $\frac{8^{17} \times 6^{-6}}{9^{-3} \times 2^{42}} = 2^3$.
- $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - (5^2)^5 \times (7^2)^2}{(5^3 \times 7)^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3(1-7)}{5^9 \times 7^3(1+2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = -\frac{10}{3}$
- donc $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = -\frac{10}{3}$.
- $\frac{55^2 \times 121^{-2} \times 125^2}{275 \times 605^{-2} \times 25^4} = \frac{(5 \times 11)^2 \times (11^2)^{-2} \times (5^3)^2}{5^2 \times 11 \times (11^2 \times 5)^{-2} \times (5^2)^4} = \frac{5^2 \times 11^2 \times 11^{-4} \times 5^6}{5^2 \times 11 \times 11^{-4} \times 5^{-2} \times 5^8} = 11$ donc $\frac{55^2 \times 121^{-2} \times 125^2}{275 \times 605^{-2} \times 25^4} = 11$.
- $\frac{12^{-2} \times 15^4}{25^2 \times 18^{-4}} = \frac{(3 \times 2^2)^{-2} \times (5 \times 3)^4}{(5^2)^2 \times (2 \times 3^2)^{-4}} = \frac{3^{-2} \times 2^{-4} \times 5^4 \times 3^4}{5^4 \times 2^{-4} \times 3^{-8}} = 3^{10}$ donc $\frac{12^{-2} \times 15^4}{25^2 \times 18^{-4}} = 3^{10}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
- $a_n = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^{-n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- donc $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
- $b_n = (-1)^{n+2} = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- donc $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
- $c_n = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$ donc $c_n = 1$.
- $d_n = (-1)^{4n+1} = (-1)^{4n} \times (-1) = -1$ donc $d_n = -1$.
5. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $a^5 = 1$.
- $A = a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1 = a^5 \times a^2 - 3(a^5 \times a) + 4 \times 1 - a^2 + 3a - 1 = a^2 - 3a + 4 - a^2 + 3a - 1 = 3$ donc $A = 3$.
- $B = a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123} = a^{1234+2341+3412+4123} = a^{11110} = a^{2222 \times 5} = (a^5)^{2222} = 1^{2222} = 1$ donc $B = 1$.
- $C = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = \frac{1 - a^5}{1 - a} = 0$ donc $C = 0$.

 Développer/Factoriser
1. Soit x un réel.

$$\bullet A(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-4) = (-3x+2)(x-4) = -3x^2 + 12x + 2x - 8 = -3x^2 + 14x - 8 \text{ donc } \boxed{A(x) = -3x^2 + 14x - 8}.$$

$$\bullet \text{ Rappel : } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^3, (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$B(x) = (2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \text{ donc } \boxed{B(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}.$$

$$\bullet C(x) = (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^2(x+1) + (x+1)^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \text{ donc } \boxed{C(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

$$\bullet D(x) = (2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1) = 10x^2 - 16x + 15x - 24 - (10x^2 - 2x - 20x + 4) = 10x^2 - x - 24 - 10x^2 + 22x - 4 \text{ donc } \boxed{D(x) = 21x - 28}.$$

2. Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$.

$$\bullet (3+i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i \text{ donc } \boxed{(3+i)^2 = 8 + 6i}.$$

$$\bullet (3-2i)^3 = 27 - 54i + 36i^2 - 8i^3 = 27 - 54i - 36 + 8i = -9 - 46i \text{ donc } \boxed{(3-2i)^3 = -9 - 46i}.$$

$$\bullet (4-5i)(6+3i) = 24 + 12i - 30i - 15i^2 = 24 - 18i + 15 = 39 - 18i \text{ donc } \boxed{(4-5i)(6+3i) = 39 - 18i}.$$

3. Soit x un réel.

$$\bullet A(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \text{ donc } \boxed{A(x) = 3x(x-2)}.$$

$$\bullet B(x) = (3x+2)(x-1) + (5x-3)(5x-5) = (3x+2)(x-1) + 5(5x-3)(x-1) = (x-1)[3x+2+5(5x-3)] \\ B(x) = (x-1)(3x+2+25x-15) = (x-1)(28x-13) \text{ donc } \boxed{B(x) = (x-1)[3x+2+5(5x-3)]}.$$

$$\bullet C(x) = (2x-3)(2x-4) - (2-x)(4x-2) = 2(2x-3)(x-2) - 2(2-x)(2x-1) = 2(x-2)(2x-3+2x-1) \\ C(x) = 2(x-2)(4x-4) = 8(x-2)(x-1) \text{ donc } \boxed{C(x) = 8(x-2)(x-1)}.$$

$$\bullet D(x) = 8x+4 - (x-5)(2x+1) = 4(2x+1) - (x-5)(2x+1) = (2x+1)[4 - (x-5)] = (2x+1)(4-x+5) = (2x+1)(-x+9) \\ \text{donc } \boxed{D(x) = (2x+1)(-x+9)}.$$

$$\bullet E(x) = (12x-4)(x+2) - 7x(3x-1) + (9x-3)(x-1) = 4(3x-1)(x+2) - 7x(3x-1) + 3(3x-1)(x-1) \\ E(x) = (3x-1)[4(x+2) - 7x + 3(x-1)] = (3x-1)(4x+8-7x+3x-3) = (3x-1)(-3x+5) \\ \text{donc } \boxed{E(x) = (3x-1)(-3x+5)}.$$

$$\bullet F(x) = 9x^2 + 49 - 42x = (3x-7)^2 \text{ donc } \boxed{F(x) = (3x-7)^2}.$$

$$\bullet G(x) = (2x+1)^2 - 49 = (2x+1+7)(2x+1-7) = (2x+8)(2x-6) = 4(x+4)(x-3) \text{ donc } \boxed{G(x) = 4(x+4)(x-3)}.$$

$$\bullet H(x) = -(3x+5)^2 + (1-x)^2 = (1-x+3x+5)[1-x-(3x+5)] = (2x+6)(-4x-4) = -8(x+3)(x+1) \\ \text{donc } \boxed{H(x) = -8(x+3)(x+1)}.$$

$$\bullet I(x) = (x+2)(3x-6) + 5(4-2x)^2 = 3(x+2)(x-2) + 20(2-x)^2 = 3(x+2)(x-2) + 20(x-2)^2 \\ I(x) = (x-2)[3(x+2) + 20(x-2)] = (x-2)(3x+6+20x-40) = (x-2)(23x-34) \text{ donc } \boxed{I(x) = (x-2)(23x-34)}.$$

$$\bullet J(x) = 3x^2 - x + (x+1)(3x-1) = x(3x-1) + (x+1)(3x-1) = (3x-1)(x+x+1) = (3x-1)(2x+1) \\ \text{donc } \boxed{J(x) = (3x-1)(2x+1)}.$$

$$\bullet K(x) = (3x+5)^2 - 3x - 5 = (3x+5)(3x+5-1) = (3x+5)(3x+4) \text{ donc } \boxed{K(x) = (3x+5)(3x+4)}.$$

$$\bullet L(x) = 9(x-1)^2 - (2x+3)^2 = (3(x-1))^2 - (2x+3)^2 = [3(x-1)+2x+3][3(x-1)-(2x+3)] \\ L(x) = (3x-3+2x+3)(3x-3-2x-3) = 5x(x-6) \text{ donc } \boxed{L(x) = 5x(x-6)}.$$

$$\bullet M(x) = -49x^2 + 1 = (1-7x)(1+7x) \text{ donc } \boxed{M(x) = (1-7x)(1+7x)}.$$

$$\bullet N(x) = (5x-3)(x+1) - (x+1)^2 + x^2 - 1 = (5x-3)(x+1) - (x+1)^2 + (x-1)(x+1) \\ N(x) = (x+1)[5x-3 - (x+1) + x-1] = (x+1)(5x-5) = 5(x+1)(x-1) \text{ donc } \boxed{N(x) = 5(x+1)(x-1)}.$$

$$\bullet O(x) = 2x(4-x) - 4 + x = 2x(4-x) - (4-x) = (4-x)(2x-1) \text{ donc } \boxed{O(x) = (4-x)(2x-1)}.$$

$$\bullet P(x) = x^2 + 6x + 9 - (x+3)(x-1) = (x+3)^2 - (x+3)(x-1) = (x+3)[x+3 - (x-1)] = 4(x+3) \text{ donc } \boxed{P(x) = 4(x+3)}.$$

- $Q(x) = x^2 + 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ donc $\boxed{Q(x) = (x - 2)(x - 1)}$.
- $R(x) = -5x^2 + 6x - 1 = -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right) = (x - 1)(-5x + 1)$ donc $\boxed{R(x) = (x - 1)(-5x + 1)}$.
- $S(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ donc $\boxed{S(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$.

- 1.
- $|-2| = 2$
 - $|\pi - 3| = \pi - 3$
 - $|\pi - 4| = 4 - \pi$
 - $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

2. Le tableau complété :

$x \in [\dots; \dots]$	$\dots \leq x \leq \dots$	x appartient à l'intervalle fermé de centre $\dots$ et de rayon $\dots$	$ x - \dots \leq \dots$
$x \in [-1; 2]$	$-1 \leq x \leq 2$	Centre : 0,5 et rayon : 1,5	$ x - 0,5 \leq 1,5$
$x \in [2; 4]$	$2 \leq x \leq 4$	Centre : 3 et rayon : 1	$ x - 3 \leq 1$
$x \in [0; 3]$	$0 \leq x \leq 3$	Centre : $\frac{3}{2}$ et rayon : $\frac{3}{2}$	$\left x - \frac{3}{2}\right \leq \frac{3}{2}$
$x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$	$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$	Centre : 1 et rayon : $\frac{5}{2}$	$ x - 1 \leq \frac{5}{2}$
$x \in \left[-\frac{5}{4}; 3\right]$	$-\frac{5}{4} \leq x \leq 3$	Centre : $\frac{7}{8}$ et rayon : $\frac{17}{8}$	$\left x - \frac{7}{8}\right \leq \frac{17}{8}$

- 3.
- **Rappel :** $\forall X \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |X| = a \iff X = a \text{ ou } X = -a$

Soit $x \in \mathbb{R}, |x - 8| = 1 \iff x - 8 = 1 \text{ ou } x - 8 = -1 \iff x = 9 \text{ ou } x = 7$.

Donc $S = \{7; 9\}$.

- **Rappel :** $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, |X| = |Y| \iff X = Y \text{ ou } X = -Y \iff X^2 = Y^2$

Soit $x \in \mathbb{R}, |1 - 2x| = |x + 3| \iff 1 - 2x = x + 3 \text{ ou } 1 - 2x = -x - 3 \iff 3x = -2 \text{ ou } x = 4 \iff x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 4$.

Donc $S = \left\{-\frac{2}{3}; 4\right\}$.

- **Rappel :** $\forall X \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |X| \leq a \iff -a \leq X \leq a$

Soit $x \in \mathbb{R}, |2 - x| < 3 \iff -3 < 2 - x < 3 \iff -5 < -x < 1 \iff -1 < x < 5$

Donc $S =]-1; 5[$.

- **Rappel :** $\forall X \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |X| \geq a \iff X \leq -a \text{ ou } X \geq a$

Soit $x \in \mathbb{R}, |3x + 4| \geq 5 \iff 3x + 4 \leq -5 \text{ ou } 3x + 4 \geq 5 \iff 3x \leq -9 \text{ ou } 3x \geq 1 \iff x \leq -3 \text{ ou } x \geq \frac{1}{3}$.

$S =]-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

- Ici, l'inéquation est formée de la comparaison de deux valeurs absolues, le réflexe est d'élever au carré.

Soit $x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq |x - 1| \iff (2x - 3)^2 \leq (x - 1)^2 \iff (2x - 3)^2 - (x - 1)^2 \leq 0 \iff (3x - 4)(x - 2) \leq 0$.

On effectue alors un tableau de signes et on obtient $S = \left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

- On écrit $2|x+1| + |5-x|$ sans valeur absolue à l'aide d'un tableau.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On détermine les valeurs de x pour lesquelles les expressions mises en valeur absolue changent de signe.

- $x+1=0 \iff x=-1$

- $5-x=0 \iff x=5$

- On dresse le tableau :

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$ x+1 $	$-x-1$	0	$x+1$	$x+1$
$ 5-x $	$5-x$	$5-x$	0	$x-5$
$2 x+1 + 5-x $	$-3x+3$	$x+7$	$3x-3$	



Il n'y a pas de zéro sur la dernière ligne. En effet, on fait une somme, pas un produit!

- On résout alors 3 équations :

- Si $x \in]-\infty; -1]$, $2|x+1| + |5-x| = 8 \iff -3x+3 = 8 \iff -3x = 5 \iff x = -\frac{5}{3}$.

Or $-\frac{5}{3} \in]-\infty; -1]$, donc $S_1 = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

- Si $x \in [-1; 5]$, $2|x+1| + |5-x| = 8 \iff x+7 = 8 \iff x = 1$.

Or $1 \in [-1; 5]$, donc $S_2 = \{1\}$.

- Si $x \in [5; +\infty[$, $2|x+1| + |5-x| = 8 \iff 3x-3 = 8 \iff 3x = 11 \iff x = \frac{11}{3}$.

Or $\frac{11}{3} \notin [5; +\infty[$, donc $S_3 = \emptyset$.

- On détermine l'ensemble des solutions de l'équation : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ donc $S = \left\{-\frac{5}{3}; 1\right\}$.