

Cahier de vacances mathématiques
Eléments de correction fiches 6 à 10

Lycée Ozanam – Site Icam Lille

2026 - 2027

C. HÉDIN

- 1.
- $\sqrt{(-3)^2} = 3$
 - $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = 2 - \sqrt{3}$
 - $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = \sqrt{7} - 2$
 - $(\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6}) = \sqrt{6}^2 - 3^2 = 6 - 9 = -3$ donc $(\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6}) = -3$.
 - $(2-\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$ donc $(2-\sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.
 - $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{1^2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$ donc $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = 1+\sqrt{3}$.
 - $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4 = ((\sqrt{2\sqrt{3}})^2)^2 = (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 = 12$ donc $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4 = 12$.
 - $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3+2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+3 = 10$ donc $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 10$.
 - $\sqrt{25+36+64} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ donc $\sqrt{25+36+64} = 5\sqrt{5}$.
 - $\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{45} = 2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ donc $\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{45} = 2\sqrt{5}$.
 - $3\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{48} = 6\sqrt{3}+6\sqrt{3}-4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ donc $3\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$.
 - $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{7+2\sqrt{7}\sqrt{5}+5+7-2\sqrt{7}\sqrt{5}+5}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{24}{2} = 12$
donc $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = 12$.

2. Pour comparer deux nombres positifs, on compare leurs carrés et on utilise le sens de variation de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$.

$$(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2} \text{ et } (\sqrt{3})^2 = 3 \text{ donc } (1+\sqrt{2})^2 > (\sqrt{3})^2.$$

Or la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc $1+\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

- 3.
- Soit $x \in [0; +\infty[$, $A(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.
Donc $\forall x \in [0; +\infty[$, $A(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.
 - Soit $x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $B(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{4\sqrt{x}}{x-1}$.
Donc $\forall x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $B(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x-1}$.
 - Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $C(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)|1-x^2|}$.
Or $|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } 1-x^2 \geq 0 \\ x^2-1 & \text{si } x^2-1 < 0 \end{cases}$, donc $|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $C(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$.



1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0 \iff x-3 = 0 \iff x = 3$. Donc $S = \{3\}$.
- $9x^2 + 6x + 1 = 0 \iff (3x+1)^2 = 0 \iff 3x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$. Donc $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.
- $x^2 + 4x - 12 = 0 : \Delta = 4^2 - 4 \times (-12) = 16 + 48 = 64$. Donc l'équation admet deux solutions réelles dont la somme est égale à -4 et le produit est égal à -12 . Alors $S = \{-6; 2\}$.
- $x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$. Donc $S = \{0; 5\}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3 > 0$ donc l'équation $2x^2 + 3 = 0$ n'a pas de solution réelle. Ainsi $S = \emptyset$.
- $2x^2 - x - 6 = 0 : \Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49$. Donc l'équation admet deux solutions réelles dont la somme est égale à $\frac{1}{2}$ et le produit est égal à -3 . Alors $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$.

2. • $9 + 13 = 22$ et $9 \times 13 = 117$

donc une équation du second degré admettant comme solutions les réels 9 et 13 est : $x^2 - 22x + 117 = 0$.

• $-11 + 17 = 6$ et $-11 \times 17 = -187$

donc une équation du second degré admettant comme solutions les réels -11 et 17 est : $x^2 - 6x - 187 = 0$.

• $2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$ et $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$

donc une équation du second degré admettant comme solutions les réels $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$ est : $x^2 - 4x + 1 = 0$.

3. • $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0 : \Delta = [-2(m-1)]^2 - 16(m+2) = 4m^2 - 8m + 4 - 16m - 32 = 4m^2 - 24m - 28 = 4(m^2 - 6m - 7)$.
L'équation $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ admet une solution double si et seulement si son discriminant est nul.
Or $\Delta = 0 \iff m^2 - 6m - 7 = 0 \iff m = -1$ ou $m = 7$.

Dans le cas où $m = -1$, $S = \{-2\}$ et dans le cas où $m = 7$, $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

• $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m+3 = 0 : \Delta = [2(3m+1)]^2 - 4(m+3)^2 = 4[(3m+1)^2 - (m+3)^2] = 4(3m+1+m+3)(3m+1-m-3) = 4(4m+4)(2m-2) = 32(m+1)(m-1)$.

L'équation $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m+3 = 0$ admet une solution double si et seulement si son discriminant est nul.

Or $\Delta = 0 \iff (m+1)(m-1) = 0 \iff m = -1$ ou $m = 1$.

Dans le cas où $m = -1$, $S = \{1\}$ et dans le cas où $m = 1$, $S = \{-1\}$.

4. • Le discriminant du trinôme $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ est $\Delta = (\sqrt{2}+1)^2 - 4 \times \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 4\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$

Or $3 - 2\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2}$ donc $\Delta = (1 - \sqrt{2})^2$. Ainsi $\Delta > 0$ donc $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ admet pour racines 1 et $\sqrt{2}$.
Lorsque son discriminant est strictement positif, le trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.

Donc $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} \leq 0 \iff x \in [1; \sqrt{2}]$. D'où $S = [1; \sqrt{2}]$.

• Le discriminant du trinôme $-x^2 + 2x + 15$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 4 + 60 = 64$.

$-x^2 + 2x + 15$ admet deux racines réelles dont la somme est égale à 2 et le produit est égal à -15 : ces racines sont donc 5 et -3 .

Donc $-x^2 + 2x + 15 > 0 \iff x \in]-3; 5[$. D'où $S =]-3; 5[$.

1. • $\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2$ donc $\ln 16 = 4 \ln 2$.
- $\ln 512 = \ln 2^9 = 9 \ln 2$ donc $\ln 512 = 9 \ln 2$.
- $\ln(0,125) = \ln\left(\frac{5^3}{10^3}\right) = \ln 5^3 - \ln 10^3 = 3 \ln 5 - 3 \ln(5 \times 2) = 3 \ln 5 - 3 \ln 5 - 3 \ln 2 = -3 \ln 2$ donc $\ln(0,125) = -3 \ln 2$.
- $3 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \ln \sqrt{2} = -3 \ln 2^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \ln 2$ donc $3 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2} \ln 2$.
- $\frac{1}{8} \ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8} \ln 2^2 + \frac{1}{4} \ln 2^3 = -\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{3}{4} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$ donc $\frac{1}{8} \ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \ln 2$.
- $\ln\left(\frac{16}{25}\right) = \ln\left(\frac{2^4}{5^2}\right) = \ln 2^4 - \ln 5^2 = 4 \ln 2 - 2 \ln 5$ donc $\ln\left(\frac{16}{25}\right) = 4 \ln 2 - 2 \ln 5$.
- $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right) = -\ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \dots + \ln 98 - \ln 99 + \ln 99 - \ln 100 = -\ln 100 = -\ln(5 \times 2)^2 = -2 \ln(5 \times 2) = -2 \ln 5 - 2 \ln 2$ donc $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right) = -2 \ln 5 - 2 \ln 2$.
2. $A = \ln((2 + \sqrt{3})^{20}) + \ln((2 - \sqrt{3})^{20}) = \ln\left[(2 + \sqrt{3})^{20}(2 - \sqrt{3})^{20}\right] = \ln\left[(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right]^{20} = \ln(2^2 - \sqrt{3}^2)^{20} = \ln 1^{20} = \ln 1 = 0$ donc $A = 0$.
3. $B = \ln 8 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 16 = \ln 2^3 - \ln 2 + \ln 2^2 - \ln 2^4 = 3 \ln 2 - \ln 2 + 2 \ln 2 - 4 \ln 2 = 0$.
Donc $B \in \mathbb{N}$.
4. $C = \ln(\sqrt{5} - 1) + \ln(\sqrt{5} + 1) = \ln\left[(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)\right] = \ln(\sqrt{5}^2 - 1^2) = \ln 4 = 2 \ln 2$.
En posant $a = b = 2$, il existe a et b deux entiers naturels non nuls tels que $C = a \ln b$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1 + e^{-x}) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) = \ln(1 + e^x) - x$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(1 + e^{-x}) = \ln(1 + e^x) - x$.
6. • On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette équation.
Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x - 3 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \iff x > 3$. Alors $\mathcal{D} =]3; +\infty[$.
Soit $x \in \mathcal{D}, \ln(x-3) + \ln(2x+1) = 2 \ln 2 \iff \ln[(x-3)(2x+1)] = \ln 4 \iff (x-3)(2x+1) = 4 \iff 2x^2 - 5x - 7 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{7}{2}$.
Or $-1 \notin \mathcal{D}$ donc $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.
- On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation.
Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D} \iff x + 1 > 0 \iff x > -1$. Alors $\mathcal{D} =]-1; +\infty[$.
Soit $x \in \mathcal{D}, \ln(x+1) > 0 \iff x + 1 > 1 \iff x > 0$.

x	-1	0	2	$+\infty$
Signe de $x-2$	-	-	0	+
Signe de $\ln(x+1)$	-	0	+	+
Signe du produit	+	0	-	+

Donc $S =]-1; 0[\cup]2; +\infty[$.



- $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = 8$ donc $e^{3\ln 2} = 8$.
 - $e^{-2\ln 3} = e^{\ln(\frac{1}{3^2})} = \frac{1}{9}$ donc $e^{-2\ln 3} = \frac{1}{9}$.
 - $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$ donc $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$.
 - $e^{\ln 3 - \ln 2} = e^{\ln(\frac{3}{2})} = \frac{3}{2}$ donc $e^{\ln 3 - \ln 2} = \frac{3}{2}$.
 - $e^{-\ln(\ln 2)} = e^{\ln(\frac{1}{\ln 2})} = \frac{1}{\ln 2}$ donc $e^{-\ln(\ln 2)} = \frac{1}{\ln 2}$.
 - $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) = \ln(e^4)^{\frac{1}{2}} - \ln(e^2)^{\frac{1}{2}} = \ln e^2 - \ln e = 2 \ln e - 1 = 2 - 1 = 1$ donc $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) = 1$.
 - $\ln(\sqrt{e^{-\ln e^2}}) = \ln(e^{-\ln e^2})^{\frac{1}{2}} = \ln(e^{-\frac{1}{2} \ln e^2}) = \ln(e^{-\ln e}) = \ln(e^{-1}) = -\ln e = -1$ donc $\ln(\sqrt{e^{-\ln e^2}}) = -1$.
- On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de A .
Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D} \iff 1-x > 0 \iff x < 1$ donc $\mathcal{D} =]-\infty; 1[$.
Soit $x \in]-\infty; 1[, A(x) = e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{1-x}})} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
Donc $\forall x \in]-\infty; 1[, A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
 - On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de B .
Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D} \iff x+1 > 0 \iff x > -1$ donc $\mathcal{D} =]-1; +\infty[$.
Soit $x \in]-1; +\infty[, B(x) = e^x \times e^{-\ln(x+1)} = e^x \times e^{\ln(\frac{1}{x+1})} = \frac{e^x}{x+1}$.
Donc $\forall x \in]-1; +\infty[, B(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

3. • Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2+x} = 1 \iff -x^2 + x = \ln 1 \iff -x^2 + x = 0 \iff -x(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$. Donc $S = \{0; 1\}$.

• On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D} \iff e^x - 2 > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$. Alors $\mathcal{D} =]\ln 2; +\infty[$.

Soit $x \in \mathcal{D}$, $\ln(e^x - 2) \geq 0 \iff e^x - 2 \geq 1 \iff e^x \geq 3 \iff x \geq \ln 3$. Donc $S = [\ln 3; +\infty[$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x-5} > 12 \iff 3x - 5 > \ln 12 \iff 3x > \ln 12 + 5 \iff x > \frac{\ln 12 + 5}{3}$.

Ainsi $S = \left] \frac{\ln 12 + 5}{3}; +\infty \right[$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{1+\ln x} \leq 2 \iff 1 + \ln x \leq \ln 2 \iff \ln x \leq \ln 2 - 1 \iff x \leq e^{\ln 2 - 1} \iff x \leq \frac{2}{e}$. Donc $S = \left] 0; \frac{2}{e} \right]$.

• Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{2e^x - e^{2x}}{x-1} > 0 \iff \frac{e^x(2 - e^x)}{x-1} > 0$. Or $e^x > 0$ donc $\frac{2e^x - e^{2x}}{x-1} > 0 \iff \frac{2 - e^x}{x-1} > 0$.

De plus, $2 - e^x \geq 0 \iff e^x \leq 2 \iff x \leq \ln 2$.

On peut alors dresser le tableau de signes du quotient :

x	$-\infty$	$\ln 2$	1	$+\infty$
Signe de $2 - e^x$	+	0	-	-
Signe de $x - 1$	-	-	0	+
Signe du quotient	-	0	+	-

Donc $S =]\ln 2; 1[$.



1. Tableau complété :

Angle α en degrés	Angle α en radians	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$
0	0	1	0	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	1	impossible
120	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180	π	-1	0	0
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	impossible
300	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360	2π	1	0	0

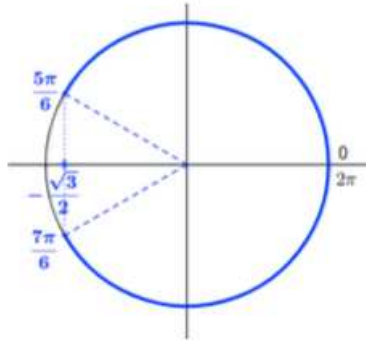
- 2.
- $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
 - $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$
 - $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

3. • Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x - \sin x = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x - \cos x + \cos x = -\sin x$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x + \cos x = 2 \cos x$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2 \cos x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x - \cos x = -2 \cos x$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = -2 \cos x$.



1. $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ donc $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, alors $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$.
Or $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos \theta \leq 0$, alors $\cos \theta = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ainsi $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
2. • Soit $x \in \mathbb{R}$, $2 \sin x = 1 \iff \sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Or $x \in [-\pi; \pi]$ donc $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $1 - \sqrt{2} \cos x = 0 \iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Or $x \in [0; 2\pi]$ donc $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$.
- $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \iff 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Or $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $S = \left\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}\right\}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x = \sin x \iff \sin x(\sin x - 1) = 0 \iff \sin x = 0$ ou $\sin x = 1 \iff x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Or $x \in [-\pi; \pi]$ donc $S = \left\{-\pi; 0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \iff \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
 $\sin x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Or $x \in [0; 2\pi]$ donc $S = \left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$.
- Soit $x \in [0; 2\pi]$ alors $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.
 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \iff -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} \iff 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$.
Alors $S = \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$.

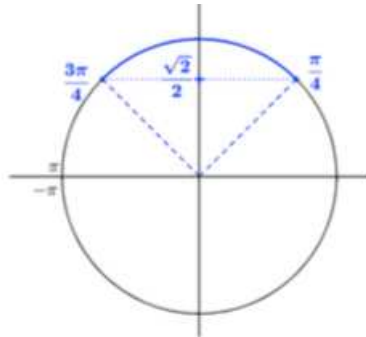
- Soit $x \in [0; 2\pi]$, $2\sqrt{3}\cos x + 3 > 0 \iff \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Donc $S = \left[0; \frac{5\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{6}; 2\pi \right]$.

- Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ alors $2x \in [-\pi; \pi]$.

$$1 - \sqrt{2}\sin 2x < 0 \iff \sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Donc $1 - \sqrt{2}\sin 2x < 0 \iff \frac{\pi}{4} < 2x < \frac{3\pi}{4} \iff \frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$.

Ainsi $S = \left] \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8} \right[$.



1.
 - La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - La fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.
 - $\sin'(2x) = 2\cos(2x)$.
 - La dérivée de la fonction $\ln$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
 - La suite (u_n) est croissante.
 - La fonction inverse est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; \infty[$.
2.
 - f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - f est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1; +\infty[$
 - $f \geq 0$ sur $[-1; +\infty[$.
3.
 - f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.
 Soit $x \in]0; +\infty[, f'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln x = 1 + \ln x$.
 Donc $\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1 + \ln x}$.
 - La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée et somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} - 3}$.
 - La fonction $x \mapsto 2x + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\sin(2x + 3)}$.
 - f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4(2x - 5)(x^2 - 5x)^3}$.
 - f est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
 Soit $x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(e^x + 1)x - (e^x + x) \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$.
 Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}}$.
 - $\ln$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ à valeurs dans $]0; +\infty[$. Par composée, f est dérivable sur $]1; +\infty[$.
 $\boxed{\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x \ln x}}$.

- La fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est dérivable sur $] -1; 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Or la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée, f est dérivable sur $] -1; 1[$.

$$\text{Soit } x \in] -1; 1[, f'(x) = \frac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}.$$

OU :

$$\forall x \in] -1; 1[, f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \text{ donc } \forall x \in] -1; 1[, f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in] -1; 1[, f'(x) = \frac{2}{1-x^2}}.$$

- La fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Or la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}}.$$

- f est dérivable sur $]1; +\infty[$.

$$\text{Soit } x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}.$$

- f est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

4. • La tangente Δ a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $] -1; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{Soit } x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}.$$

$$f(0) = -2 \text{ et } f'(0) = 2 \text{ donc } \boxed{\Delta \text{ a pour équation } y = 2x - 2}.$$

- On étudie le signe de $f(x) - (2x+2)$ pour tout $x \in] -1; +\infty[$.

$$\text{Soit } x \in] -1; +\infty[, f(x) - (2x+2) = \frac{x^2-2}{x+1} - (2x+2) = \frac{(x^2-2) - (2x+2)(x+1)}{x+1} = \frac{x^2-2-2x^2-2x+2x+2}{x+1} = \frac{-x^2}{x+1}.$$

$$\text{Or } \forall x \in] -1; +\infty[, x+1 > 0 \text{ et } -x^2 \leq 0 \text{ donc } \forall x \in] -1; +\infty[, \frac{-x^2}{x+1} \leq 0.$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in] -1; +\infty[, f(x) \leq y. \text{ Donc } \boxed{\mathcal{C} \text{ est en dessous de } \Delta \text{ sur }] -1; +\infty[}.$$