

Cahier de vacances mathématiques
Éléments de correction fiches 11 à 16

Lycée Ozanam – Site Icam Lille

2026 - 2027

C. HÉDIN

1. • $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - e^x.$

• $\forall x \in]0; +\infty[, F(x) = 2x - 8\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{x}.$

• Soit $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^3.$

Donc $f = \frac{1}{2}u'u^3$ avec $u(x) = 2x+1$, alors $F = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}u^4.$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4.$

• Soit $x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2)e^{-2x} + \frac{1}{3} \times 3e^{3x}.$

Donc $f = -\frac{1}{2}u'e^u + \frac{1}{3}v'e^v$ avec $u(x) = -2x$ et $v(x) = 3x$, alors $F = -\frac{1}{2}e^u + \frac{1}{3}e^v.$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{3x}.$

• Soit $x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin' x \sin^2 x.$

Donc $f = u'u^2$ avec $u = \sin$, alors $F = \frac{1}{3}u^3.$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x.$

• Soit $x \in]0; \frac{4}{3}[$, $f(x) = \frac{\frac{3}{2} \times 3}{3x-4} - \frac{1}{x}.$ Donc $f = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u} - v'$ avec $u(x) = 3x-4$ et $v'(x) = \frac{1}{x}.$ Alors $F = \frac{1}{3}\ln|u| - v.$

Donc $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x-4| - \ln|x|.$

Or $x \in]0; \frac{4}{3}[$ donc $x > 0$ et $3x-4 < 0.$

Ainsi $\forall x \in]0; \frac{4}{3}[$, $F(x) = \frac{1}{3}\ln(4-3x) - \ln x.$

• Soit $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\frac{3}{2}(2x-4)}{x^2-4x+5}.$ Donc $f = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2-4x+5.$ Alors $F = \frac{3}{2}\ln|u|.$

Donc $F(x) = \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5|.$ Or $\forall x \in \mathbb{R}, x^2-4x+5 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5).$

• Soit $x \in]-1; 1[, f(x) = \frac{-4(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}.$ Donc $f = -4 \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1-x^2.$ Alors $F = -4 \times 2\sqrt{u}.$

Donc $\forall x \in]-1; 1[, F(x) = -8\sqrt{1-x^2}.$

• Soit $x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x.$ Donc $f = u'u$ avec $u = \ln.$ Alors $F = \frac{1}{2}u^2.$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$

2. • $J = \int_0^1 (x^2 - 2x + 3) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{7}{3}$. Donc $I = \frac{7}{3}$.

• $J = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|2x+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3$.

Donc $I = \frac{1}{2} \ln 3$.

• $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos 4x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}$. Donc $I = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

• $J = \int_{-1}^1 x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} (x^2 + 1)^4 \right]_{-1}^1 = 0$. Donc $I = 0$.

3. • Soit $x \in [1; e]$, on pose $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2} x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$.

u et v sont des fonctions dérivables, à dérivées continues sur $[1; e]$.

Alors par intégration par parties, $J = \int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} e^2 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$.

Donc $J = \frac{e^2 + 1}{4}$.

• Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, on pose $\begin{cases} u'(x) = \cos x \\ v(x) = 2x + 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \sin x \\ v'(x) = 2 \end{cases}$.

u et v sont des fonctions dérivables sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, à dérivées continues sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Alors par intégration par parties, $J = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} e^2 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$.

Donc $J = \frac{e^2 + 1}{4}$.

$J = \left[(2x + 1) \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = \pi + 1 - (-\pi + 1)(-1) - 2[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

Donc $J = 2$.

Suites explicites/suites récurrentes

- $u_0 = \frac{12}{5}$
 - $u_1 = 8$
 - $u_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{5} \times 2^{n+1+2} = \frac{2n+5}{5} \times 2^{n+3}$ donc $u_{n+1} = \frac{2n+5}{5} \times 2^{n+3}$.
 - $u_{3n} = \frac{2 \times 3n+3}{5} \times 2^{3n+2} = \frac{6n+3}{5} \times 2^{3n+2}$ donc $u_{3n} = \frac{6n+3}{5} \times 2^{3n+2}$.
- $v_2 = 2v_1 + 3 = 2(2v_0 + 3) + 3 = 2(2+3) + 3 = 13$ donc le troisième terme de (v_n) est $v_2 = 13$.
 - $v_3 = 2v_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 29$ donc $v_3 = 29$.
- $w_1 = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$, $w_2 = \frac{1}{2} \times 8^2 = 32$ et $w_3 = \frac{1}{2} \times 32^2 = 512$ donc le troisième terme de (w_n) est $w_3 = 512$.
 - $w_3 = 512$
- $t_{2n} = \ln\left(\frac{(2n)^{2n}}{2^{2n}}\right) = \ln\left(\frac{2^{2n} \times n^{2n}}{2^{2n}}\right) = \ln(n^{2n}) = 2n \ln n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{2n} = 2n \ln n$.
 - $t_{4n} = \ln\left(\frac{(4n)^{4n}}{2^{4n}}\right) = \ln\left(\frac{2^{4n} \times (2n)^{4n}}{2^{4n}}\right) = \ln((2n)^{4n}) = 4n \ln(2n)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{4n} = 4n \ln(2n)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)+2}{n+1+1} - \frac{3n+2}{n+1} = \frac{(3n+5)(n+1) - (3n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3n^2+5n+3n+5-3n^2-6n-2n-4}{(n+2)(n+1)}$

donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi la suite (u_n) est strictement croissante.

Suites arithmétiques/suites géométriques

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2n$ donc $u_9 = 1 + 2 \times 9 = 19$.
 - Ainsi le dixième terme de (u_n) est $u_9 = 19$.
 - $u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = 100 \times \frac{u_0 + u_{99}}{2} = \frac{(1 + 1 + 2 \times 99) \times 100}{2} = \frac{20000}{2} = 10000$ donc $u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = 10000$.
- $v_{103} = v_{102} + r$ et $v_{102} = v_{101} + r$ donc $v_{103} = v_{101} + 2r$. Or $v_{101} = \frac{2}{3}$ et $v_{103} = \frac{3}{4}$ donc $\frac{3}{4} = \frac{2}{3} + 2r$. D'où $r = \frac{1}{24}$.
 - $r > 0$ donc (v_n) est croissante.
 - Le terme général de (v_n) est $v_n = v_0 + \frac{1}{24}n$.
- $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc (w_n) est décroissante.
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ donc $w_{10} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9$.
 - $w_1 + w_2 + \dots + w_{80} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{80}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{80}$ donc $w_1 + w_2 + \dots + w_{80} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{80}$.

Suites arithmético-géométriques

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2023 et a enregistré 2500 inscriptions en 2023.

Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents. On modélise cette situation par une suite numérique (a_n) .

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2023 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année 2023 + n .

1. (a) $a_1 = 0,8 \times a_0 + 400 = 0,8 \times 2500 + 400 = 2400$. Donc $a_1 = 2400$.
 $a_2 = 0,8 \times a_1 + 400 = 0,8 \times 2400 + 400 = 2320$. Donc $a_2 = 2320$.
- (b) $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 0,8a_n + 400$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = a_{n+1} - 2000 = 0,8a_n + 400 - 2000 = 0,8a_n - 1600 = 0,8(a_n - 2000) = 0,8v_n$.
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 500$.
- (b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 500 \times 0,8^n$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a_n - 2000$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = v_n + 2000$.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
- (c) $0 < 0,8 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$.
Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2000$.
- (d) Au fil des années le nombre d'adhérents décroît et va venir se stabiliser vers 2000.

Pour s'entraîner :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : " $u_n = 4 + 8 \times 3^n$ ". Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

① Initialisation : $u_0 = 12$ et $4 + 8 \times 3^0 = 4 + 8 = 12$ donc $u_0 = 4 + 8 \times 3^0$.

Ainsi P_0 est vraie.

② Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 4 + 8 \times 3^{n+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

Or $u_{n+1} = 3u_n - 8$ donc $u_{n+1} = 3(4 + 8 \times 3^n) - 8 = 12 + 3 \times 8 \times 3^n - 8 = 4 + 8 \times 3^{n+1}$.

Donc P_{n+1} est vraie.

③ Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 + 8 \times 3^n}$.

2. • $u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\boxed{u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

$u_3 = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc $\boxed{u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

• Il semble que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : " $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ". Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

① Initialisation : $u_1 = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ donc $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$.

Ainsi P_1 est vraie.

② Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Or $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ donc $u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Donc P_{n+1} est vraie.

③ Conclusion : La propriété est initialisée au rang 1 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n : "1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}"$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

① Initialisation : $\frac{1 \times 2}{2} = 1$.

Ainsi P_1 est vraie.

② Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$.

Or $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ donc $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Alors P_{n+1} est vraie.

③ Conclusion : La propriété est initialisée au rang 1 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : "10^n - 1$ est un multiple de 9". Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

① Initialisation : $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et 0 est un multiple de 9.

Ainsi P_0 est vraie.

② Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $10^{n+1} - 1$ est un multiple de 9.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\exists k \in \mathbb{N} / 10^n - 1 = 9k$.

Donc $10^{n+1} - 1 = 10 \times 10^n - 1 = 10 \times (9k + 1) - 1 = 9 \times 10k + 9 = 9(10k + 1)$.

Posons $k' = 10k + 1$. Donc $\exists k' \in \mathbb{N} / 10^{n+1} - 1 = 9k'$. Ainsi $10^{n+1} - 1$ est un multiple de 9.

Donc P_{n+1} est vraie.

③ Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, 10^n - 1 \text{ est un multiple de 9.}}$

5. Soit $x \in]0; +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : "(1+x)^n \geq 1 + nx"$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

① Initialisation : $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$ donc $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x$.

Ainsi P_0 est vraie.

② Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $(1+x)^n \geq 1 + nx$ donc $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$.

Or $(1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$ et $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ (car $nx^2 \geq 0$)

donc $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.

Ainsi P_{n+1} est vraie.

③ Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx}$.

Limites de suites

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n^3 - 2n^2 + 2 = n^3 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^3}\right)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^3}\right) = 1$.
De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$. Ainsi par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 2n^2 + 2) = +\infty$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n^2 + n + 2}{1 - n} = \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n \left(\frac{1}{n} - 1\right)} = \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n} - 1}$.
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1$.
De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n + 2}{1 - n} = -\infty$.
- $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n = -\infty$. Ainsi par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3n + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = -\infty$.
- $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 0$.

Limites de fonctions

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
 - Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et si $n = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = +\infty$.
 - Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$ et si $n = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 2) = +\infty$ donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - x + 2) = +\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \ln x = -\infty$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{x} = -\infty$ donc par somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 - \frac{2}{x} + 3 \ln x\right) = -\infty$.
Ainsi l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de la fonction $x \mapsto x^2 - \frac{2}{x} + 3 \ln x$.
 - $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} -3x + 4 = 10$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} 2 + x = 0^-$ donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{-3x + 4}{2 + x} = -\infty$.
Ainsi la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{-3x + 4}{2 + x}$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$. Or $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc par composée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

- Soit $x \in]-\infty; -2[$, $\frac{x^2 - 3x + 7}{4 - x^2} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1\right)} = \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1}$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} - 1 = -1$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 7}{4 - x^2} = -1$.

Alors la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 7}{4 - x^2}$ en $-\infty$.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x^2 - 3x + 7) = 5$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (4 - x^2) = 0^+$ donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 - 3x + 7}{4 - x^2} = +\infty$

Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 7}{4 - x^2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x \left(1 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{e^x}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$ alors par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 1$.

Donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

- Soit $x \in]-\infty; 0[$, $2e^{-x} - 3x^2 + x + 1 = x^2 \left(\frac{2}{x^2 e^x} - 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0^+$ par croissance comparée donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 e^x} = +\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x^2 e^x} - 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$. Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{-x} - 3x^2 + x + 1) = +\infty$.

- Soit $x \in]-\infty; 0[$, $x^2 + 2x - 4 \ln x = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - 4 \frac{\ln x}{x^2}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - 4 \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$. Ainsi par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 4 \ln x) = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 2}{x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$ donc par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{3x - 2}{x + 1}\right) = \ln 3$.

Alors la droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction $x \mapsto \ln \left(\frac{3x - 2}{x + 1}\right)$ en $+\infty$.

 Exercice 1

Montrons que $EFGH$ est un parallélogramme qui possède un angle droit, ce qui caractérise un rectangle.

- ★ On remarque que les points E, F, G et H sont distincts.
- ★ $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Par conséquent $EFGH$ est un parallélogramme.
- ★ $\overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = (-8) \times 2 + 1 \times 16 = 0$.

Ainsi $EFGH$ est un rectangle.

 Exercice 2

1. *Pas de difficultés.*
2. (a) On trace le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (d) coupe ce cercle en deux points.

Il semble donc, d'après la figure, qu'il y ait deux points solutions au problème.

- (b) i. Si $M \in (d)$ alors $y = 2x$.

ii. En utilisant le fait que $y = 2x$, on obtient $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 6-x \\ 1-2x \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} -3-x \\ 3-2x \end{pmatrix}$.

iii. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (6-x)(-x-3) + (1-2x)(3-2x) = x^2 - 3x - 18 + 4x^2 - 8x + 3 = 5x^2 - 11x - 15$.

Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5x^2 - 11x - 15$.

- iv. (MA) perpendiculaire à (MB) donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

On résout donc $5x^2 - 11x - 15 = 0$.

On trouve $x_1 = \frac{11 + \sqrt{421}}{10}$ et $x_2 = \frac{11 - \sqrt{421}}{10}$.

Ainsi, si $M \in (d)$, on trouve deux points solutions au problème : $M_1 \left(\frac{11 + \sqrt{421}}{10}; \frac{11 + \sqrt{421}}{5} \right)$ et

$M_2 \left(\frac{11 - \sqrt{421}}{10}; \frac{11 - \sqrt{421}}{5} \right)$.

Il reste à vérifier que $M_1 \in (d)$, $M_2 \in (d)$, $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{BM_1} = 0$ et $\overrightarrow{AM_2} \cdot \overrightarrow{BM_2} = 0$.

Vérifier que $M_1 \in (d)$ et $M_2 \in (d)$ est immédiat en utilisant l'équation de (d) .

Le calcul des deux produits scalaires est laissé au lecteur.

Ainsi, il existe deux points appartenant à la droite (d) tels que (AM) et (BM) sont perpendiculaires :

ce sont les points $M_1 \left(\frac{11 + \sqrt{421}}{10}; \frac{11 + \sqrt{421}}{5} \right)$ et $M_2 \left(\frac{11 - \sqrt{421}}{10}; \frac{11 - \sqrt{421}}{5} \right)$.

Exercice 3

1. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \iff x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 \iff (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

Donc $A(1;2)$ est le centre de $\mathcal{C}$ et $R = \sqrt{2}$ est le rayon de $\mathcal{C}$.

2. $2^2 + 3^2 - 2 \times 2 - 4 \times 3 + 3 = 4 + 9 - 4 - 12 + 3 = 0$ donc $B \in \mathcal{C}$.

3. $2 + 3 - 5 = 0$ donc $B \in (d)$.

De plus, un vecteur directeur de (d) est le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (2-1) \times (-1) + (3-2) \times 1 = -1 + 1 = 0$ donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire à (d) . Ainsi (d) est tangente à $\mathcal{C}$ au point B .

Exercice 4

1. Si $x = 2$ alors $y = 0$ et si $x = 5$ alors $y = 1$.

On trace donc la droite passant par les points de coordonnées $A'(2,0)$ et $B'(5,1)$.

2. Un vecteur normal à la droite (d) est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Notons (d') la droite perpendiculaire à (d) et passant par A .

Alors $\vec{n}$, vecteur normal à (d) , est un vecteur directeur de (d') .

Une équation cartésienne de (d') est donc de la forme $-3x - y + c = 0$ avec c un réel.

Or $A(-3,5) \in (d')$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d') . D'où $-3 \times (-3) - 5 + c = 0$. Donc $c = -4$.

Une équation cartésienne de (d') est donc $-3x - y - 4 = 0$.

4. H appartient aux droites (d) et (d') donc ses coordonnées sont solutions du système :
$$\begin{cases} -3x - y - 4 = 0 \\ -x + 3y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Après résolution du système, on trouve que H a pour coordonnées $(-1; -1)$.

5. La distance entre le point A et la droite (d) est la distance AH .

$$\text{Or } AH = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Donc la distance entre le point A et la droite (d) est égale à $2\sqrt{10}$.

Exercice 1

1. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et l'on constate que $\overrightarrow{AM} = -2\vec{u}$.

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ étant colinéaires, le point M appartient à la droite (d) .

2. On remarque que $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{v}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc M appartient à la droite (d') .

3. $\vec{u} \neq \vec{0}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \neq \lambda\vec{u}$. Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires et les droites ont le point commun M . Elles sont donc *sécantes* en M .

Exercice 2

1. (a) B est le milieu de $[AM]$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$. D'où
$$\begin{cases} x_M = x_B + x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_M = y_B + y_{\overrightarrow{AB}} \\ z_M = z_B + z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_M = 2x_B - x_A \\ y_M = 2y_B - y_A \\ z_M = 2z_B - z_A \end{cases}.$$

Après calculs, $M(-6, 13, 17)$.

- (b) On cherche α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix}$.

On résout alors le système
$$\begin{cases} -8 = 2\alpha - \beta \\ 14 = \alpha + 4\beta \\ 20 = 0 \times \alpha + 4\beta \end{cases}.$$

Les solutions sont $\alpha = -2$ et $\beta = 4$. Ainsi $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc $M \in \mathcal{P}$.

2. (a) Supposons que $C \in \mathcal{P}$. Alors il existe des réels α, β tels que $\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Or $\overrightarrow{AC} = (10, -7, -8)$ implique $5\beta = -8$, donc $\beta = -\frac{8}{5}$; puis $\alpha + 4\beta = -7$ donne $\alpha = -\frac{3}{5}$, et alors $2\alpha - \beta = \frac{2}{5} \neq 10$, contradiction. Donc $C \notin \mathcal{P}$.

- (b) Comme $M \in \mathcal{P}$ et $C \notin \mathcal{P}$, la droite (MC) coupe $\mathcal{P}$ en M : (MC) est *sécante* au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 3

1. (a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 7 - 3 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et ainsi le triangle ABC est rectangle en A .

(b) $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 - 6 + 12 = 11$, $BA = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{11}$, $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{77}$.

(c) L'angle $\widehat{ABC}$ vérifie : $\cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{11}{\sqrt{11} \sqrt{77}}$ donc $\widehat{ABC} \approx 68^\circ$.

2. (a) Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ car $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 - 1 + 3 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 - 7 - 1 = 0$.

$\vec{n}$ est donc un vecteur normal à (ABC) .

(b) La droite $\mathcal{D}$ orthogonale à (ABC) et passant par E a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(c) Il suffit de vérifier les points suivants :

- la droite (EH) est orthogonale au plan (ABC) ,
- le point H est bien dans le plan (ABC) .

La droite (EH) est orthogonale au plan (ABC) : en effet, les coordonnées de $\overrightarrow{EH}$ sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{EH} = \frac{3}{2} \vec{n}$.

$\vec{n}$ étant un vecteur normal au plan (ABC) , le vecteur $\overrightarrow{EH}$ l'est également.

Le point H est bien dans le plan (ABC) : les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est donc parallèle au plan (ABC) et donc le point H appartient à ce plan.

Ainsi, le point $H \left(4; \frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC) .