TD 1 : Logique et raisonnements

OBJECTIFS :

- C0 : Savoir formuler la négation d'une proposition.
- C1 : Savoir rédiger une démonstration commençant par $\forall$.
- C2 : Savoir démontrer une existence.
- C3 : Savoir démontrer une implication.
- C4 : Savoir raisonner par contraposition.
- C5 : Savoir démontrer une équivalence.
- C6 : Savoir raisonner par disjonction de cas.
- C7 : Savoir construire un contre-exemple.
- C8 : Savoir raisonner par l'absurde.
- C9 : Savoir raisonner par analyse-synthèse.
- C10 : Savoir raisonner par récurrence.

EXERCICE 1

Vrai ou faux? Justifier.

1. $\exists x \in \mathbb{R}_+, x < \sqrt{x}$.
2. $\forall (x, x') \in (\mathbb{R}\backslash\{2\})^2, x \neq x' \Longrightarrow \dfrac{x+2}{x-2} \neq \dfrac{x'+2}{x'-2}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.
5. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$.

EXERCICE 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Le plan est muni d'un repère.

1. Ecrire les assertions suivantes avec des quantificateurs.
   - f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
   - f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   - La courbe de la fonction f coupe la droite d'équation $y = x$ en un unique point.
   - f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   - f est paire.
   - f est $T-$périodique ($T \in \mathbb{R}^*$)
2. Ecrire la négation des propositions ci-dessus en français puis avec des quantificateurs.

EXERCICE 3

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$.
2. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Longrightarrow xy - x - y + 1 \neq 0$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq (n+1)!$
5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$.
   Montrer par analyse-synthèse que :
   $$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \times 2^n + b$$
6. A l'aide d'une récurrence forte, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 / n = 2^p(2q+1)$$
7. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1}$.
   Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$$
8. Montrer par analyse synthèse que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'une fonction impaire $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.