TD 1 Logique et raisonnements

Elements de correction

EXERCICE 3

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Montrer par analyse-synthèse que :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \times 2^n + b$$

Analyse : Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \times 2^n + b$.
En particulier, si $n = 0$ alors $u_0 = a + b$ et si $n = 1$ alors $u_1 = 2a + b$.
Alors $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 - b \\ 2(3-b) + b = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6 \\ b = -3 \end{cases}$.
Ainsi s'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \times 2^n + b$ alors $a = 6$ et $b = -3$.

Synthèse : Montrons par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 6 \times 2^n - 3$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\mathscr{P}_n$: "$u_n = 6 \times 2^n - 3$".
Montrons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1 Initialisation : $u_0 = 3$ et $6 \times 2^0 - 3 = 3$ donc $u_0 = 2^0 - 3$. Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.
2 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie càd que $u_n = 6 \times 2^n - 3$.
Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie càd que $u_{n+1} = 6 \times 2^{n+1} - 3$.
$u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2(6 \times 2^n - 3) + 3 = 6 \times 2^{n+1} - 6 + 3 = 6 \times 2^{n+1} - 3$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
3 Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 3$.

Donc $\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \times 2^n + b}$.

7. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1}$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$$

Montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathscr{P}_n$: "$1 \leq u_n \leq n^2$".
Montrons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Initialisation : $u_1 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 1^2$ donc $1 \leq u_1 \leq 1^2$.
$u_2 = u_1 + \dfrac{u_0}{1} = 2$ et $1 \leq 2 \leq 2^2$ donc $1 \leq u_2 \leq 2^2$.
Ainsi $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont vraies.

2 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies c'est-à-dire que $1 \leq u_n \leq n^2$ et $1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2$.
Montrons que $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie c'est-à-dire que $1 \leq u_{n+2} \leq (n+2)^2$.
$1 \leq u_n \leq n^2$ et $\dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{u_n}{n+1} \leq \dfrac{n^2}{n+1}$.
De plus, $1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2$ donc $1 + \dfrac{1}{n+1} \leq u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1} \leq (n+1)^2 + \dfrac{n^2}{n+1}$.
D'où $1 \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \dfrac{n^2}{n+1}$. Or $\dfrac{n^2}{n+1} \leq \dfrac{n^2}{n}$ donc $\dfrac{n^2}{n+1} \leq n$.
Alors $(n+1)^2 + \dfrac{n^2}{n+1} \leq (n+1)^2 + n \leq (n+2)^2$. Ainsi $1 \leq u_{n+2} \leq (n+2)^2$.
Donc $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie.

3 Conclusion : La propriété est initialisée aux rangs 1 et 2 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2}$.

8. Montrer par analyse synthèse que toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et d'une fonction impaire $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Analyse : On suppose qu'il existe une fonction p paire et une fonction i impaire telles que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=p(x)+i(x)$.
p est paire donc $\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$ et $p(-x)=p(x)$.
i est impaire donc $\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$ et $i(-x)=-i(x)$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=p(-x)+i(-x)=p(x)-i(x)$.
De plus, $f(x)=p(x)+i(x)$ donc par somme, $f(x)+f(-x)=2p(x)$ et par différence, $f(x)-f(-x)=2i(x)$.
D'où $p(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Ainsi définies, p et i sont uniques.
Synthèse : Soit p et i deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ définies par
$\forall x\in\mathbb{R}, p(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

- $p(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=p(x)$. Donc p est paire.
- $i(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-i(x)$. Donc i est impaire.
- $p(x)+i(x)=\dfrac{2f(x)}{2}=f(x)$. Donc $f=p+i$.

Ainsi p et i existent.
Conclusion : $\boxed{\text{Toute fonction dérivable de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ manière unique comme la somme d'une fonction paire } p:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ et d'une fonction impaire } i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.}$.