TD 2

OBJECTIFS :

- AL 3-1 : Connaître parfaitement la signification des symboles ensemblistes et maîtriser leur utilisation.
- AL 3-2 : Décrire en compréhension un ensemble.
- AL 3-3 : Savoir montrer l'égalité de deux ensembles.
- AL 3-4 : Connaître la définition du produit cartésien et maîtriser son utilisation.
- AN 4-1 : Maîtriser les automatismes relatifs aux inégalités et à la valeur absolue.
- AN 4-2 : Montrer qu'une partie est majorée (minorée) ou non, qu'elle admet un maximum (un minimum) ou non.
- AN 4-3 : Connaître la définition de la partie entière d'un nombre réel et savoir l'utiliser.
- AL 5-1 : Savoir transformer un système linéaire en un système échelonné.
- AL 5-2 : Résoudre un système avec la méthode du pivot de Gauss.
- AL 5-3 : Savoir utiliser la résolution d'un système pour déterminer l'intersection de droites du plan, l'intersection de droites et plans de l'espace.
- AL 5-4 : Résoudre un système linéaire avec paramètre(s).

Ensembles

Exercice 1

Décrire en compréhension les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{1;3;5;\cdots\}$
2. $E_2 = \{1;10;100;1000;\cdots\}$
3. E_3 est l'ensemble des valeurs prises par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $y \in \mathbb{R}$. E_4 est l'ensemble des antécédents de y par une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit l'ensemble $E = \{a,b,c,d\}$.
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $a \in E$
- $b \subset E$
- $\{c\} \subset E$
- $\emptyset \in E$
- $\emptyset \subset E$
- $\{\emptyset\} \subset E$
- $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$

Exercice 3

Soit x et y deux éléments distincts d'un ensemble E.
Expliciter les ensembles $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{x\}))$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{x,y\}))$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$.

Exercice 4

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Les questions sont indépendantes.

1. A-t-on $(C \subset A \cup B) \Longrightarrow (C \subset A \text{ ou } C \subset B)$?
2. Montrer que $(A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A \subset B$. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

3. (a) Montrer que $(A\cup B)\cap C\subset A\cup(B\cap C)$.
   (b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $A\subset C$.
4. Montrer que $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.
5. Montrer que $A\cup B=A\cup C\Longleftrightarrow A\cup\overline{B}=A\cup\overline{C}$.

EXERCICE 5

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

1. $A\cup(\overline{A}\cap B)$
2. $A\cap(\overline{A}\cup B)$
3. $\overline{A\cup B\cup\overline{C}}\cap(A\cap\overline{B})$

EXERCICE 6

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $A=\{(t+1;4t+3), t\in\mathbb{R}\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/4x-y=1\}$.
   Montrer que $A=B$.
2. Soit $A=\{(2t,t^2+1), t\in\mathbb{R}\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\leq y\}$.
   Montrer que $A\subset B$. A-t-on l'égalité ?
3. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq 1\}$. Montrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

EXERCICE 7

Soit E et F deux ensembles.
A_1 et A_2 sont des parties de E ; B_1 et B_2 sont des parties de F.

1. Montrer que $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$.
2. A-t-on $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)=(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)$?
3. Montrer que $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_1)=(A_1\cup A_2)\times B_1$.

Nombres réels

EXERCICE 8

Montrer que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x+y|\leq|x|+|y|$ et $\big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$.

EXERCICE 9

Pour chacune des parties suivantes, déterminer si elle est majorée, minorée et si elle admet un minimum, un maximum.

1. $A=\left\{1-\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$
2. $B=\left\{\dfrac{x+1}{x+2}, x\in]-\infty;-3]\right\}$
3. $C=\left\{\dfrac{2p}{2pq+3}, (p,q)\in\mathbb{N}^2\right\}$
4. $D=\left\{\dfrac{x+2y}{x+y+1}, (x,y)\in[0;1]^2\right\}$

EXERCICE 10

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor x+y\rfloor$.
2. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, \forall\alpha\in\mathbb{Z}, \lfloor x+\alpha\rfloor=\lfloor x\rfloor+\alpha$.

EXERCICE 11

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $\lfloor kx\rfloor$ pour tout $k\in[\![1;n]\!]$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\cdots+\lfloor nx\rfloor}{n^2}$.

EXERCICE 12

1. Justifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2<n^2+n+1<(n+1)^2$.
2. Montrer que $\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1}\right\rfloor$ est un nombre impair pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 13

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor = -2$.
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor x-1 \rfloor = x$.
3. $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$.

Systèmes linéaires

EXERCICE 14

Résoudre les systèmes suivants (les inconnues étant des nombres réels) :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 1 \\ 3x & + & 5y & = & 5 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ x & - & 2y & = & 1 \\ -x & + & 5y & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 4y & + & 6z & = & 22 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & -4 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 4y & + & 2z & = & -2 \\ 3x & - & y & + & 6z & = & -\dfrac{1}{2} \\ -2x & + & 2y & - & 3z & = & \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ -3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & 3y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_6)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & 3y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(S_7)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \end{array}\right. \qquad (S_8)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & -x \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2y \\ -6x & + & 3y & - & 3z & = & 3z \end{array}\right.$$

EXERCICE 15

L'espace est muni d'un repère.

1. Résoudre le système suivant en fonction de la valeur du paramètre a, $a \in \mathbb{R}$, et donner une interprétation géométrique des solutions.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & (a+1)y & + & z & = & 6 \\ -x & + & (a-1)y & + & (a+1)z & = & a^2-2 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}\right.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   On considère les plans $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ d'équations respectives
   $x+y+az = 1-a^2, x+ay+z = a-a^2$ et $-ax+(1-2a)y-z = (1-a)^2$.
   Etudier la nature de l'intersection des trois plans $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ en fonction de la valeur du paramètre a.