TD 2

Elements de correction

Exercice 4

4. Montrer que $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

- Montrons que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$.
  Soit $x\in\overline{A\cap B}$. Alors $x\in E$ et $x\notin A\cap B$. Donc $x\in E$ et ($x\notin A$ ou $x\notin B$).
  Alors ($x\in E$ et $x\notin A$) ou ($x\in E$ et $x\notin B$).
  Ainsi $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. D'où $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$.
- Montrons que $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$.
  Soit $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. Alors $x\in\overline{A}$ ou $x\in\overline{B}$. Donc ($x\in E$ et $x\notin A$) ou ($x\in E$ et $x\notin B$).
  Ainsi $x\in E$ et ($x\notin A$ ou $x\notin B$). Donc $x\in E$ et $x\notin A\cap B$. Alors $x\in\overline{A\cap B}$.
  Ainsi $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$.

  D'où $\boxed{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$.

  Montrons que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

  D'après l'égalité précédente appliquée à $\overline{A}$ et $\overline{B}$, on obtient $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}$.
  D'où $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=A\cup B$.
  Par passage au complémentaire, $\boxed{\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}.}$.

Exercice 5

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Simplifier l'écriture des ensembles suivants.

1. $A\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup\overline{A})\cap(A\cup B)=E\cap(A\cup B)=A\cup B$.
2. $A\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$.
3. $\overline{A\cup B\cup\overline{C}}\cap(A\cap\overline{B})=(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cap(A\cap\overline{B})=(\overline{A}\cap A)\cap\overline{B}\cap C=\varnothing\cap\overline{B}\cap C=\varnothing$

Exercice 13

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. $\left\lfloor\dfrac{x-1}{2}\right\rfloor=-2\iff -2\leq\dfrac{x-1}{2}<-2+1\iff -4\leq x-1<-2\iff -3\leq x<-1$.
   Donc $\boxed{S=[-3;-1[}$.
2. 1er cas : $x\geq1$. Alors $x-1\geq0$ et donc $|x-1|=x-1$.
   D'où $\lfloor x\rfloor+|x-1|=x\iff\lfloor x\rfloor+x-1=x\iff\lfloor x\rfloor=1\iff 1\leq x<2$.
   2ème cas : $x<1$. Alors $x-1<0$ et donc $|x-1|=1-x$.
   D'où :
   $$\begin{aligned}\lfloor x\rfloor+|x-1|=x &\iff \lfloor x\rfloor+1-x=x\\ &\iff \lfloor x\rfloor=2x-1\\ &\iff 2x-1\leq x<2x-1+1 \text{ et } (2x-1)\in\mathbb{Z}\\ &\iff 2x-1\leq x<2x \text{ et } 2x\in\mathbb{Z}\\ &\iff 0<x\leq1 \text{ et } 2x\in\mathbb{Z}\\ &\iff x=1 \text{ ou } x=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
   Donc $\boxed{S=[1;2[\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}}$.
3. **Analyse :** On suppose que l'équation $\lfloor 2x-1\rfloor=\lfloor x+1\rfloor$ admet une solution dans $\mathbb{R}$.
   Alors $\left\{\begin{array}{ccc}2x-2 & < & \lfloor 2x-1\rfloor & \leq 2x-1\\ x & < & \lfloor x+1\rfloor & \leq x+1\end{array}\right.$. Donc $\left\{\begin{array}{ccc}2x-2 & < & x+1\\ x & < & 2x-1\end{array}\right.$.
   D'où $\left\{\begin{array}{ccc}x & < & 3\\ 1 & < & x\end{array}\right.$.

   Ainsi si x est solution de l'équation $\lfloor 2x-1\rfloor=\lfloor x+1\rfloor$ alors $x\in]1;3[$.
   Synthèse :
   <u>1er cas :</u> Supposons que $x\in\left]1;\frac{3}{2}\right]$.
   Alors $1<2x-1\leq2$ et $2<x+1\leq\frac{5}{2}$.
   Donc $2x-1$ et $x+1$ ne peuvent pas avoir la même partie entière.
   L'équation $\lfloor 2x-1\rfloor=\lfloor x+1\rfloor$ n'a alors pas de solution.

2ème cas : Supposons que $x \in \left]\frac{3}{2};2\right[$.

Alors $2 < 2x-1 < 3$ et $\frac{5}{2} < x+1 < 3$.

Dans ce cas, $2x-1$ et $x+1$ ont la même partie entière : 2.

Ainsi l'équation $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$ a pour solution $\left]\frac{3}{2};2\right[$.

3ème cas : Supposons que $x \in \left[2;\frac{5}{2}\right[$.

Alors $3 \leq 2x-1 < 4$ et $3 \leq x+1 < \frac{7}{2}$.

Dans ce cas, $2x-1$ et $x+1$ ont la même partie entière : 3.

Ainsi l'équation $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$ a pour solution $\left[2;\frac{5}{2}\right[$.

4ème cas : Supposons que $x \in \left[\frac{5}{2};3\right[$.

Alors $4 \leq 2x-1 < 5$ et $\frac{7}{2} \leq x+1 < 4$.

Donc $2x-1$ et $x+1$ ne peuvent pas avoir la même partie entière.

L'équation $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$ n'a alors pas de solution.

Conclusion : $\boxed{S = \left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right[}$.