Thème : algèbre

TD 3 : Calculs algébriques

OBJECTIFS :

- AL 6-1 : Savoir manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
- AL 6-2 et AL 6-3 : Calculer des sommes et des produits en utilisant les sommes de référence et/ou en effectuant des changements d'indice.
- AL 6-4 et AL 6-5 : Calculer des sommes doubles rectangulaires ou triangulaires.
- AL 6-6 : Manipuler les coefficients binomiaux, calculer des sommes les faisant intervenir.
- AL 6-7 : Savoir utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{2k+1}$
2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$
3. $S_n = \sum_{k=1}^{n} (3k + e^{-k} + 2)$
4. $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{3^{2k-1}}$
5. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (3^{k+1} - 3k + 4)$
6. $S_n = \sum_{i=1}^{n} i2^i$ en posant $j = i - 1$.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En exprimant de deux manières différentes $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right]$, calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.
2. *Application :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes : $T_n = \sum_{k=1}^{n} (3k+1)(2k-1)$ et $U_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.
2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$.
3. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k^2 + 4k + 3}$.
4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
5. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$
6. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
7. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{n-k}$
8. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} i(n-j)$
2. $S_n = \sum_{1 \le i, j \le n} i$
3. $S_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} (i+j)$
4. $S_n = \sum_{1 \le i, j \le n} (i+j)^2$
5. $S_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} |j-i|$
6. $S_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1}$
7. $S_n = \sum_{1 \le i < j \le n} j$
8. $S_n = \sum_{1 \le i, j \le n} \max(i, j)$

EXERCICE 5

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. Montrer que $\forall k \in [\![0; n]\!], \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En posant $p = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire que $2S_n = 2^{2n+1}$ et conclure.

EXERCICE 6

Soit $n \ge 2$. Calculer les produits suivants :

1. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
2. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
3. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1}$
4. $P_n = \prod_{k=1}^{n} (6k-3)$

EXERCICE 7

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Factoriser les nombres $k^3 - 1$ et $k^3 + 1$.
2. En déduire, sans utiliser de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$$

.

3. En déduire que la suite $\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}}$ est convergente et déterminer sa limite.