TD 5 : Fonctions usuelles (partie 1) et trigonométrie

OBJECTIFS :

- AN 9-1 : Connaître parfaitement les définitions des fonctions usuelles et leurs propriétés (ensemble de définition, parité, dérivée, sens de variation,limites, allure de la courbe, propriétés de calculs).
- AN 9-2 : Résoudre des équations faisant intervenir des fonctions usuelles.
- AN 9-3 : Etudier une fonction faisant intervenir des fonctions usuelles.
- AN 9-4 : Simplifier une expression formée à partir de fonctions usuelles.
- AN 9-5 : Démontrer une inégalité faisant intervenir des fonctions usuelles.
- AL 10-1 : Résoudre des équations et inéquations trigonométriques.
- AL 10-2 : Etudier des fonctions trigonométriques.

Fonctions usuelles (partie 1)

EXERCICE 1

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $2^{x+1} + 4^x = 15$
   (b) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression $\dfrac{2ch^2(x) - sh(2x)}{x - \ln(chx) - \ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[, shx \geq x$, puis que $\forall x \in \mathbb{R}, chx \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

EXERCICE 2

1. Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
   On note $Argsh$ son application réciproque.
2. Le but de cette question est de déterminer la dérivabilité de la fonction $Argsh$ sans déterminer son expression.
   (a) Montrer que $\forall y \in I, ch(Argshy) = \sqrt{1+y^2}$.
   (b) Justifier que $Argsh$ est dérivable sur un intervalle J à préciser et déterminer l'expression de sa fonction dérivée.
3. (a) Montrer que $\forall y \in I, y - \sqrt{1+y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1+y^2} > 0$.
   (b) Déterminer l'expression de $Argsh$.

Trigonométrie

EXERCICE 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur l'intervalle I :

1. $\sin(2x) \geq \sin x$ et $I = [-\pi;\pi]$
2. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -\sqrt{3}$ et $I = \mathbb{R}$
3. $2\sin x \tan x + 4\cos x = 5$ et $I = \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$
4. $4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$ et $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. (a) Montrer que f est $2\pi-$périodique.
   Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   (b) Etudier la parité de f.
   Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   (c) Sur quel intervalle peut-on restreindre l'étude de f ?

2. (a) Calculer la dérivée de la fonction f et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sin x(2\cos x - 1)$.

   (b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0;\pi]$ et dresser son tableau de variation sur une période.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une période.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - \cos x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. (a) Montrer que f est périodique de période π puis que $A\left(\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

   > **Définition :**
   > Soit f définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   > - On dit que le point $A(a;b)$ est **centre de symétrie** de la courbe $\mathscr{C}$ si $\forall h \in \mathbb{R} / a-h \in \mathscr{D}$ et $a+h \in \mathscr{D}, f(a-h)+f(a+h) = 2b$.
   > - On dit que la droite d'équation $x = a$ est **axe de symétrie** de la courbe $\mathscr{C}$ si $\forall h \in \mathbb{R} / a-h \in \mathscr{D}$ et $a+h \in \mathscr{D}, f(a-h) = f(a+h)$.

   (b) En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de f à l'intervalle $I = \left]\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

3. (a) Etudier les variations de f sur I et calculer sa limite en $\dfrac{\pi}{4}$.

   (b) Dresser son tableau de variation sur une période.

4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

5. Tracer $\mathscr{C}$ sur un intervalle d'amplitude π.