TD 4 : Généralités sur les fonctions d'une variable réelle

Elements de correction

EXERCICE 4

On note tan, la fonction tangente $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Justifier que la fonction tan est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

   $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} / \cos x \neq 0\}$ donc $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Etudier la parité et la périodicité de la fonction tan et en déduire qu'on peut l'étudier sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Soit $x \in \mathscr{D}$.

   - **Parité :**

   $$\begin{aligned} x \in \mathscr{D} &\iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff -x \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -x \neq -\frac{\pi}{2} + \pi - \pi - k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -x \neq \frac{\pi}{2} - (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -x \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \\ &\iff -x \in \mathscr{D} \end{aligned}.$$

     Donc $\forall x \in \mathscr{D}, -x \in \mathscr{D}$.

     De plus, cos est paire et sin est impaire donc $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

     Ainsi $\boxed{\text{la fonction tangente est impaire}}$.

   - **Périodicité :**

   $$\begin{aligned} x \in \mathscr{D} &\iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \in \mathscr{D} \end{aligned}.$$

     Donc $\forall x \in \mathscr{D}, x + \pi \in \mathscr{D}$.

     De plus, $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$.

     Ainsi $\boxed{\text{la fonction tangente est } \pi- \text{ périodique}}$.

   - La fonction tangente est $\pi-$ périodique donc on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude π (et centré en 0 pour utiliser ensuite la parité) : par exemple sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

     De plus, la fonction tangente est impaire donc on peut l'étudier sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

     Ainsi $\boxed{\text{on peut étudier la fonction tangente sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right[}$.

3. (a) Justifier que la fonction tan est dérivable sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

   La fonction tangente est dérivable sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Soit $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   $\tan'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

   Remarque :

   On a aussi $\tan'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

(b) Etudier son sens de variation.

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \cos^2 x > 0$ donc $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) > 0$.

Alors la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, elle est impaire donc elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.

Ainsi la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

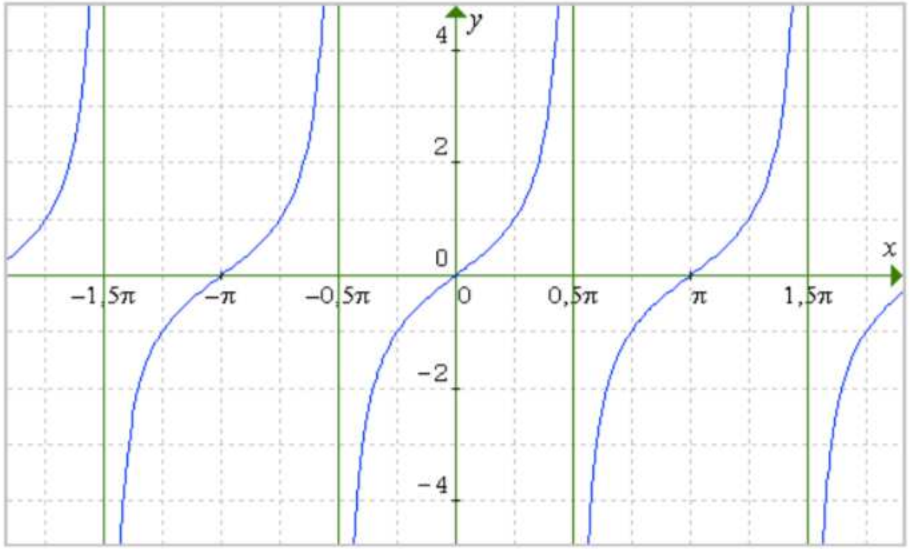
(c) Calculer les limites de la fonction tan aux bornes de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et en donner une interprétation graphique.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty}$.

De plus, la fonction tangente est impaire donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty}$.

Ainsi $\boxed{\text{les droites d'équations } x = \frac{\pi}{2} \text{ et } x = -\frac{\pi}{2} \text{ sont asymptotes}}$ $\boxed{\text{verticales à la courbe représentative de la fonction tangente}}$.

4. Tracer la courbe représentative de la fonction tan.



Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Etudier la parité de f.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$.

   De plus, $f(-x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = -\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en donner une interprétation graphique.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

   De plus, f est impaire donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1}$.

   Ainsi $\boxed{\text{les droites d'équation } y=-1 \text{ et } y=1 \text{ sont asymptotes horizontales}}$ $\boxed{\text{à la courbe représentative de } f \text{ en } -\infty \text{ et } +\infty}$.

3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

   Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	-1	1

4. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.

   f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } f(\mathbb{R}) =]-1;1[}$.

5. On pose $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de $u(x)$ et $v(x)$.

   En déduire une expression de f' en fonction de f.

   $\boxed{e^x = \dfrac{v(x)+u(x)}{2} \text{ et } 1 = \dfrac{v(x)-u(x)}{2}}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(v(x)-u(x))(v(x)+u(x))}{2v(x)^2} = \dfrac{v(x)^2-u(x)^2}{2v(x)^2} = \dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)^2\right) = \dfrac{1}{2}(1-(f(x))^2)$.

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{2}(1-(f(x))^2)}$.

6. Sans calculer f^{-1}, justifier que f^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(f^{-1})'$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{la réciproque } f^{-1} \text{ est dérivable sur }]-1;1[}$.

   Soit $y \in]-1,1[$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{2}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \dfrac{2}{1-y^2}$.

   Donc $\boxed{\forall y \in]-1,1[, (f^{-1})'(y) = \dfrac{2}{1-y^2}}$.

7. Déterminer l'expression de f^{-1}.

   1ère méthode :

   $\forall y \in]-1,1[, (f^{-1})'(y) = \dfrac{2}{1-y^2} = \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{1+y}$.

   Donc $\exists C \in \mathbb{R} / \forall y \in]-1,1[, f^{-1}(y) = -\ln(1-y) + \ln(1+y) + C = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) + C$.

   Or $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$. De plus, $f^{-1}(0) = 0 \iff C = 0$ donc $\boxed{\forall y \in]-1;1[, f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)}$.

2ème méthode :

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}\times]-1;1[$.

$$
\begin{aligned}
f(x)=y \quad &\Longleftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=y\\
&\Longleftrightarrow e^x-1=y(e^x+1)\\
&\Longleftrightarrow e^x(1-y)=y+1\\
&\Longleftrightarrow e^x=\frac{1+y}{1-y}\\
&\Longleftrightarrow x=\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \text{ car } y\in]-1;1[\text{ donc } 1-y\neq 0 \text{ et } \frac{1+y}{1-y}>0
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{\forall y\in]-1;1[, f^{-1}(y)=\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$.