TD 5 : Fonctions usuelles (partie 1) et trigonométrie

Elements de correction

EXERCICE 2

1. Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.

   La fonction sh, définie par $\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (montré en classe!) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $sh(\mathbb{R})$.
   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$ donc
   $\boxed{sh \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$
   On note $Argsh$ son application réciproque.

2. Le but de cette question est de déterminer la dérivabilité de la fonction $Argsh$ sans déterminer son expression.

   (a) Montrer que $\forall y \in I, ch(Argsh y) = \sqrt{1+y^2}$.

   Rappel : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
   Soit $y \in \mathbb{R}, ch^2(Argsh y) - sh^2(Argsh y) = 1$.
   Alors $ch^2(Argsh y) = 1 + sh^2(Argsh y) = 1 + y^2$.
   Or $1 + y^2 > 0$ donc $ch(Argsh y) = \pm\sqrt{1+y^2}$.
   De plus, la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $ch(Argsh y) > 0$.
   Ainsi $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, ch(Argsh y) = \sqrt{1+y^2}}$.

   (b) Justifier que $Argsh$ est dérivable sur un intervalle J à préciser et déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

   La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, ch, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $Argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit $y \in \mathbb{R}, Argsh'(y) = \dfrac{1}{sh'(Argsh y)} = \dfrac{1}{ch(Argsh y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

3. (a) Montrer que $\forall y \in I, y - \sqrt{1+y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1+y^2} > 0$.

   Soit $y \in \mathbb{R}, 1 + y^2 > y^2$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\sqrt{1+y^2} > |y|$. De plus, $|y| \geq y$ donc $\sqrt{1+y^2} > y$. D'où $y - \sqrt{1+y^2} < 0$.
   On a également $|y| \geq -y$ donc $\sqrt{1+y^2} > -y$. D'où $y + \sqrt{1+y^2} > 0$.
   Ainsi $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, y - \sqrt{1+y^2} < 0 \text{ et } y + \sqrt{1+y^2} > 0.}$

   (b) Déterminer l'expression de $Argsh$.

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   $$\begin{aligned}
   sh(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\
   &\iff e^x - e^{-x} = 2y \\
   &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\
   &\iff (e^x - y)^2 - y^2 - 1 = 0 \\
   &\iff (e^x - y)^2 = 1 + y^2 \\
   &\iff e^x - y = \sqrt{1+y^2} \quad \text{ou} \quad e^x - y = -\sqrt{1+y^2} \\
   &\iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \quad \text{ou} \quad e^x = y - \sqrt{1+y^2}
   \end{aligned}$$
   Or $y - \sqrt{1+y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1+y^2} > 0$ donc
   $sh(x) = y \iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.
   Ainsi $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, Argsh y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)}$.