TD 6

OBJECTIFS :

- AL 11-1, AL 11-2 : Manipuler les formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe.
- AN 12-1 : Connaître parfaitement les définitions des fonctions usuelles et leurs propriétés (ensemble de définition, parité, dérivée, sens de variation, limites, allure de la courbe, propriétés de calculs).
- AN 12-2 : Résoudre des équations faisant intervenir des fonctions usuelles.
- AN 12-3 : Etudier une fonction faisant intervenir des fonctions usuelles.
- AN 12-4 : Simplifier une expression formée à partir de fonctions usuelles.

Calculs dans $\mathbb{C}$ (partie 2)

EXERCICE 1

Les questions sont indépendantes.

1. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

   $z_1 = -3i, z_2 = 1+i, z_3 = 1-i\sqrt{3}, z_4 = -4+4i, z_5 = -7, z_6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$,

   $z_7 = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}, z_8 = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_9 = \dfrac{1}{(1+i\sqrt{3})^4}$.

2. Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

   (a) $z = 1 + i\tan\theta, \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ puis $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

   (b) $z = 1 + e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.

3. Soit $(z,u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que $\dfrac{z - u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (u \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R})$.

4. Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbb{U}^2, zz' \neq -1 \Longrightarrow \dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = i\tan\dfrac{\theta}{2}$.

EXERCICE 2

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
2. Montrer que $\forall (a,b,t) \in \mathbb{R}^3, \exists (A,\phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} / a\cos t + b \sin t = A\cos(t-\phi)$.

Fonctions usuelles (partie 2)

EXERCICE 3

Calculer les nombres suivants :

1. $Arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $Arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $Arccos(cos 4\pi)$
4. $Arccos\left(\cos\left(\dfrac{13\pi}{4}\right)\right)$
5. $Arctan\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$
6. $Arcsin\left(\sin\left(\dfrac{23\pi}{9}\right)\right)$
7. $Arccos\left(\cos\left(\dfrac{27\pi}{7}\right)\right)$
8. $Arccos\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$
9. $Arcsin\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{9}\right)\right)$
10. $cos\left(Arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

EXERCICE 4

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est un ensemble à déterminer.
   Calculer $\cos(2Arcsin x)$ et $\sin(2Arccos x)$.
2. Soit $x \in \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est un ensemble à déterminer.
   Calculer $\cos(Arctan x)$ et $\sin(Arctan x)$.

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $Arccos x = Arcsin(1-x)$
2. $Arcsin x + Arcsin(x\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2}$
3. $Arcsin x = Arccos(2x)$

EXERCICE 6

On considère la fonction définie par $f : x \mapsto Arcsin(\sin(2x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la parité et la périodicité de la fonction f.
   En déduire que l'on peut restreindre l'ensemble d'étude de la fonction f à l'intervalle $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in I$.
4. Préciser le sens de variation de la fonction f sur une période et tracer la courbe de la fonction f.

EXERCICE 7

On considère la fonction $f : x \mapsto Arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que $\forall x \in [-1;1], Arccos x + Arccos(-x) = \pi$.
   (b) En déduire que le point Ω de coordonnées $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

> **Définition :**
> Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
> Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que :
> - la droite d'équation $x = a$ est **axe de symétrie** de la courbe $\mathscr{C}$ si $\forall h \in \mathbb{R} / a-h \in \mathscr{D}$ et $a+h \in \mathscr{D}, f(a+h) = f(a-h)$.
> - le point $A(a;b)$ est **centre de symétrie** de la courbe $\mathscr{C}$ si $\forall h \in \mathbb{R} / a-h \in \mathscr{D}$ et $a+h \in \mathscr{D}, f(a+h) + f(a-h) = 2b$.

3. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis calculer sa fonction dérivée.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Déterminer une expression simplifiée de f sur $[0;1]$ puis sur $[1;+\infty[$.

EXERCICE 8

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{2} Arctan(shx)$ et
$g : x \mapsto Arctan\left(\dfrac{shx}{1+chx}\right)$.

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.
2. (a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f et simplifier l'expression de f', en en faisant intervenir que la fonction ch.
   (b) Montrer que les fonctions f et g sont égales sur leur ensemble de définition.
3. (a) Simplifier $ch\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$ et $sh\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$.
   (b) Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$.
   (c) En déduire que $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.
4. (a) Montrer que l'équation $shx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. On note α cette solution.
   (b) Montrer que $ch\alpha = \sqrt{2}$ puis calculer $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$.
   (c) Déterminer la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{8}$.