TD 6

Elements de correction

EXERCICE 4

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est un ensemble à déterminer.
   Calculer $\cos(2Arcsin x)$ et $\sin(2Arccos x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D} \iff \begin{cases} x \in [-1;1] \\ 2Arcsin x \in \mathbb{R} \\ 2Arccos x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x \in [-1;1]$. Donc $\boxed{\mathscr{D} = [-1;1]}$.

   Soit $x \in [-1;1]$, $\cos(2Arcsin x) = 1 - 2(\sin(Arcsin x))^2 = 1 - 2x^2$ et
   $\sin(2Arccos x) = 2\sin(Arccos x)\cos(Arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

   Donc $\boxed{\forall x \in [-1;1], \cos(2Arcsin x) = 1 - 2x^2 \text{ et } \sin(2Arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}}$.

2. Soit $x \in \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est un ensemble à déterminer.
   Calculer $\cos(Arctan x)$ et $\sin(Arctan x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ Arctan x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x \in \mathbb{R}$. Donc $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $(\cos(Arctan x))^2 = \dfrac{1}{1 + (\tan(Arctan x))^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Or $Arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall X \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[, \cos X > 0$ donc $\cos(Arctan x) > 0$.

   De plus, $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$.

   D'où $(\cos(Arctan x))^2 = \dfrac{1}{1+x^2} \iff \cos(Arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   $\sin(Arctan x) = \tan(Arctan x)\cos(Arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(Arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \sin(Arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$.

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $Arccos x = Arcsin(1-x)$
   Les fonctions $Arcsin$ et $Arccos$ sont définies sur $[-1;1]$.
   Notons $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de l'équation.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $x \in \mathscr{D} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le 1-x \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -2 \le -x \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$.

   Donc $x \in \mathscr{D} \iff 0 \le x \le 1$. D'où $\boxed{\mathscr{D} = [0;1]}$.

   Soit $x \in [0;1]$. Alors $Arccos x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $Arcsin(1-x) \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Or $\forall (a,b) \in \left(\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)^2, \cos a = \cos b \iff a = b$. Donc :

   $$\begin{aligned} Arccos x = Arcsin(1-x) &\iff \cos(Arccos x) = \cos(Arcsin(1-x)) \\ &\iff x = \sqrt{1-(1-x)^2} \\ &\iff x^2 = 1 - (1 - 2x + x^2) \\ &\iff 2x^2 - 2x = 0 \\ &\iff 2x(x-1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}.$$

   Donc $\boxed{S = \{0;1\}}$.

2.

3. $Arcsin x = Arccos(2x)$
   Les fonctions $Arcsin$ et $Arccos$ sont définies sur $[-1;1]$.
   Notons $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de l'équation.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $x \in \mathscr{D} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le 2x \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$.

   D'où $\boxed{\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]}$.

   Soit $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Alors $-\dfrac{\pi}{6} \le Arcsin x \le \dfrac{\pi}{6}$.
   De plus $-1 \le 2x \le 1$ donc $0 \le Arccos(2x) \le \pi$.

Ainsi :

$$Arcsin x = Arccos(2x) \iff \begin{cases} Arcsin x = Arccos(2x) \\ 0 \leq Arcsin x \leq \dfrac{\pi}{6} \\ 0 \leq Arccos(2x) \leq \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} cos(Arcsin x) = cos(Arccos(2x)) \\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = 2x \\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-x^2 = 4x^2 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} \leq 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Donc $\boxed{S = \left\{\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right\}}$.

EXERCICE 8

On considère la fonction $f : x \mapsto Arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que $\forall x \in [-1;1]$, $Arccos x + Arccos(-x) = \pi$.

   (b) En déduire que le point Ω de coordonnées $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

   Soit $h \in \mathbb{R}$. Alors $0+h \in \mathbb{R}$ et $0-h \in \mathbb{R}$.

   De plus, $f(-h) = Arccos\left(\dfrac{2(-h)}{1+(-h)^2}\right) = Arccos\left(-\dfrac{2h}{1+h^2}\right)$.

   Donc $f(h)+f(-h) = Arccos\left(\dfrac{2h}{1+h^2}\right) + Arccos\left(-\dfrac{2h}{1+h^2}\right) = \pi = 2 \times \dfrac{\pi}{2}$.

   Ainsi $\boxed{\text{le point } \Omega \text{ de coordonnées } \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \text{ est centre de symétrie de } \mathscr{C}}$.
3. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0.$

   De plus, $Arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc par composée, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}}$.

   Par symétrie, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}}$.

   (b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis calculer sa fonction dérivée.

   Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

   $f = \arccos(u)$ avec $u : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ et la fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D} \iff \dfrac{2x}{1+x^2} \in]-1;1[\iff -1 < \dfrac{2x}{1+x^2} < 1$

   $x \in \mathscr{D} \iff -(x+1)^2 < 0 < (x-1)^2 \iff x \neq -1$ et $x \neq 1$.

   Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty;-1[, \text{ sur }]-1;1[, \text{ et sur }]1;+\infty[}$.

Déterminons la dérivée de f : $f' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

$u'(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ et

$\sqrt{1-[u(x)]^2} = \sqrt{1 - \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}$.

Alors $f'(x) = -\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1+x^2}{|1-x^2|} = -\dfrac{2}{1+x^2} \times \dfrac{1-x^2}{|1-x^2|}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2} \times \dfrac{1-x^2}{|1-x^2|}$.

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}, f'(x) = -\dfrac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)|1-x||1+x|}}$.

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

- Soit $x \in]-\infty;-1[$. Alors $|1-x| = 1-x$ et $|1+x| = -x-1$.
  D'où $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$. Et dans ce cas, $f'(x) > 0$.
- Soit $x \in]-1;1[$. Alors $|1-x| = 1-x$ et $|1+x| = 1+x$.
  D'où $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$. Et dans ce cas, $f'(x) < 0$.
- Soit $x \in]1;+\infty[$. Alors $|1-x| = x-1$ et $|1+x| = 1+x$.
  D'où $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$. Et dans ce cas, $f'(x) > 0$.

De plus, $f(-1) = Arccos(-1) = \pi$ et $f(1) = Arccos(1) = 0$.

On obtient donc le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de f	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

4. Déterminer une expression simplifiée de f sur $[0;1]$ puis sur $[1;+\infty[$.

- $\forall x \in [0;1[, f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$.
  Donc $\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in [0;1[, f(x) = -2Arctan x + c$.
  Or $f(0) = Arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $c = \dfrac{\pi}{2}$.
  Ainsi $\forall x \in [0;1[, f(x) = -2Arctan x + \dfrac{\pi}{2}$.
  De plus, f est continue sur $[0;1]$ donc
  $\boxed{\forall x \in [0;1], f(x) = -2Arctan x + \dfrac{\pi}{2}}$.
- $\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.
  Donc $\exists c' \in \mathbb{R} / \forall x \in]1;+\infty[, f(x) = 2Arctan x + c'$.
  De plus, f est continue sur $[1;+\infty[$
  donc $\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = 2Arctan x + c'$.
  Or $f(1) = 0$ donc $2Arctan(1) + c' = 0 \Longleftrightarrow c' = -\dfrac{\pi}{2}$.
  Ainsi $\boxed{\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = 2Arctan x - \dfrac{\pi}{2}}$.

EXERCICE 9

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{2} Arctan(shx)$ et $g : x \mapsto Arctan\left(\dfrac{shx}{1+chx}\right)$.

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.

La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction sh est définie sur $\mathbb{R}$, donc par composée, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

La fonction ch est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x \geq 1$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x + 1 \neq 0$.

Alors la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc par composée, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

2. (a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f et simplifier l'expression de f', en ne faisant intervenir que la fonction ch.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions.

$f' = \frac{1}{2}(\text{Arctan}(\text{sh})' = \frac{\text{sh}'}{1+\text{sh}^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ch}\,x}{1+\text{sh}^2 x} = \frac{1}{2}\frac{\text{ch}\,x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{2\text{ch}\,x}$. Donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2\text{ch}\,x}}$.

(b) Montrer que les fonctions f et g sont égales sur leur ensemble de définition.

La fonction $u : x \mapsto \frac{\text{sh}\,x}{1+\text{ch}\,x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de telles fonctions dérivables et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Alors par composée, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g' = (\text{Arctan}\,u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$u'(x) = \frac{\text{ch}\,x(1+\text{ch}\,x) - \text{sh}\,x\,\text{sh}\,x}{(1+\text{ch}\,x)^2} = \frac{\text{ch}\,x + \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{(1+\text{ch}\,x)^2} = \frac{\text{ch}\,x+1}{(1+\text{ch}\,x)^2}$.

$$\begin{aligned}
1+(u(x))^2 &= 1 + \frac{\text{sh}^2 x}{(1+\text{ch}\,x)^2} \\
&= \frac{(1+\text{ch}\,x)^2 + \text{sh}^2 x}{(1+\text{ch}\,x)^2} \\
&= \frac{1+2\text{ch}\,x + \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x}{(1+\text{ch}\,x)^2} \\
&= \frac{2\text{ch}\,x(1+\text{ch}\,x)}{(1+\text{ch}\,x)^2} \\
&= \frac{2\text{ch}\,x}{1+\text{ch}\,x}
\end{aligned}.$$

D'où $g'(x) = \frac{1+\text{ch}\,x}{2\text{ch}\,x} = \frac{1}{2\text{ch}\,x}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x)$.

Ainsi $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + k$.

Or $f(0) = \frac{1}{2}\text{Arctan}(\text{sh}\,0) = \frac{1}{2}\text{Arctan}(0) = 0$ et $g(0) = \text{Arctan}\left(\frac{\text{sh}\,0}{1+\text{ch}\,0}\right) = \text{Arctan}(0) = 0$. Donc $k = 0$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)}$.

3. (a) Simplifier $ch\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$ et $sh\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

$$ch\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} + e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$sh\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} - e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

D'où $\boxed{ch\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ et } sh\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$.

(b) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$ et $g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{1}{2}Arctan\left(sh\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)\right) = \frac{1}{2}Arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) &= Arctan\left(\frac{sh\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)}{1+ch\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)}\right) \\
&= Arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right) \\
&= Arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}\right) \\
&= Arctan\left(\frac{\sqrt{3}\left(3-2\sqrt{3}\right)}{3^2-(2\sqrt{3})^2}\right) \\
&= Arctan\left(\frac{3\sqrt{3}-6}{-3}\right) \\
&= Arctan\left(2-\sqrt{3}\right)
\end{aligned}.$$

Ainsi $\boxed{f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{\pi}{12} \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = Arctan\left(2-\sqrt{3}\right)}$.

(c) En déduire que $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ donc en particulier, $f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

Alors $\frac{\pi}{12} = Arctan\left(2-\sqrt{3}\right)$. D'où $\boxed{\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$.

4. (a) Montrer que l'équation $shx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. On note α cette solution.

La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$.

Donc la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors, $\boxed{\text{l'équation } \operatorname{sh} x = 1 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}}$.

(b) Montrer que $ch\alpha = \sqrt{2}$ puis calculer $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ et par définition de α, $\operatorname{sh}\alpha = 1$, donc $\operatorname{ch}^2 \alpha = 1 + \operatorname{sh}^2 \alpha = 1 + 1 = 2$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x > 0$, donc $\boxed{\operatorname{ch}\alpha = \sqrt{2}}$.

$f(\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{8}$, donc $\boxed{f(\alpha) = \frac{\pi}{8}}$.

$$g(\alpha) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1).$$

Donc $\boxed{g(\alpha) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1)}$.

(c) Déterminer la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$.

$f(\alpha) = g(\alpha)$ donc $\frac{\pi}{8} = \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1)$. D'où $\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1}$.