Thème : Algèbre

TD 7 : Calculs dans $\mathbb{C}$ (partie 3)

OBJECTIFS :

- AL 13-1 : Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe.
- AL 13-2 : Résoudre des équations à coefficients complexes.
- AL 13-3 : Déterminer les racines $n-$ièmes d'un nombre complexe.

Exercice 1

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 12i$ $\quad Z_2 = \dfrac{1}{2i}$ $\quad Z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ $\quad Z_4 = 4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

$Z_5 = -\sqrt{5}+i\sqrt{15}$ $\quad Z_6 = -15+8i$ $\quad Z_7 = -9e^{\frac{4i\pi}{9}}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue complexe z :

1. $z^2+(5-14i)z-2(12+5i)=0$
2. $z^2-(1-5i)z-10+5i=0$
3. $z^2-2\cos\theta z+1=0$ où $\theta\in\mathbb{R}$
4. $(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0$
5. $z^4+(4-2i)z^2-8i=0$
6. $z^3-z^2+z-1=0$
7. $z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=0$ sachant que l'équation admet une solution réelle.

Exercice 3

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer les racines cubiques complexes de $Z_1=-4\sqrt{2}(1+i)$.
2. Déterminer les racines quatrièmes complexes de $Z_2=-16i$ et $Z_3=-7+24i$.
3. Simplifier $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+2+2i=0$.

Exercice 4

1. Soit $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.
   (b) Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{-i\}$, $\forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $\dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\theta}\Longleftrightarrow z=\tan\dfrac{\theta}{2}$.
   (c) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E_\alpha) : \left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$, d'inconnue α.
2. Montrer que l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i}{1-i}$ a pour ensemble de solutions $S=\{-1;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\}$.
3. Déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 5

On considère l'application exp de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par
$\forall z \in \mathbb{C}, exp(z) = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre complexe $exp(z)$ est également noté e^z et est appelé **exponentielle de** z.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer le module et un argument de e^z.
2. Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^z = e^{z'} \Longleftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ où $2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
    - $e^z = 3 - 3i\sqrt{3}$
    - $ie^z = 1 + i$