TD 7 : Calculs dans $\mathbb{C}$ (partie 3)

Eléments de correction

Exercice 4

1. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

   (a) Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

   $$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=\frac{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}=e^{2i\alpha}.$$

   Donc $\boxed{\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=e^{2i\alpha}}$.

   (b) Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{-i\}$, $\forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $\dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\theta}\iff z=\tan\dfrac{\theta}{2}$.

   Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ et $\theta\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

   $$\begin{aligned}\frac{1+iz}{1-iz}=e^{i\theta} &\iff 1+iz=e^{i\theta}(1-iz)\\ &\iff iz(e^{i\theta}+1)=e^{i\theta}-1\\ &\iff z=\frac{e^{i\theta}-1}{i(e^{i\theta}+1)} \quad \text{car} \quad e^{i\theta}\neq -1\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=\dfrac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

   Donc $\dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\theta}\iff z=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

   Donc $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{-i\},\ \forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\},\ \dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\theta}\iff z=\tan\dfrac{\theta}{2}}$.

   (c) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E_\alpha):\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$, d'inconnue α.

   Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de E_α et $z\in\mathbb{C}$.

   $z\in\mathscr{D}\iff 1-iz=0\iff 1-iz\neq 0\iff iz\neq 1\iff z\neq -i$.

   Donc $\mathscr{D}=\mathbb{C}\backslash\{-i\}$.

   Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\{-i\}$, $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\iff\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=e^{2i\alpha}$ d'après la question 1)*a*.

   Les solutions de (E_α) sont donc les nombres complexes z tels que $\dfrac{1+iz}{1-iz}$ est une racine cubique de $e^{2i\alpha}$.

   Donc $(E_\alpha)\iff\dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\frac{2\alpha+2l\pi}{3}}$, $l\in[\![0;2]\!]$.

   Soit $l\in[\![0;2]\!]$. On pose $\theta_l=\dfrac{2\alpha+2l\pi}{3}$.

   Vérifions que $\theta_l\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ pour utiliser la question 1)*b*.

   $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{-\pi+2l\pi}{3}<\theta_l<\dfrac{\pi+2l\pi}{3}$.

   - $-\dfrac{\pi}{3}<\theta_0<\dfrac{\pi}{3}$ donc $\forall k\in\mathbb{Z}, \theta_0\neq\pi+2k\pi$.
   - $\dfrac{\pi}{3}<\theta_1<\pi$ donc $\forall k\in\mathbb{Z}, \theta_1\neq\pi+2k\pi$.
   - $\pi<\theta_2<\dfrac{5\pi}{3}$ donc $\forall k\in\mathbb{Z}, \theta_2\neq\pi+2k\pi$.

   Donc $\forall l\in[\![0;2]\!], \theta_l\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

   Donc d'après la question 1)*b*, $(E_\alpha)\iff z=\tan\dfrac{\alpha+l\pi}{3}$, $l\in[\![0;2]\!]$.

   D'où $\boxed{S=\left\{\tan\dfrac{\alpha}{3};\tan\dfrac{\alpha+\pi}{3};\tan\dfrac{\alpha+2\pi}{3}\right\}}$.

2. Montrer que l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i}{1-i}$ a pour ensemble de solutions $S=\{-1;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i}{1-i} &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=i\\
&\iff 1+3iz-3z^2-iz^3=i(1-3iz-3z^2+iz^3)\\
&\iff 1-i-3(1-i)z-3(1-i)z^2+(1-i)z^3=0\\
&\iff (1-i)(1-3z-z^2+z^3)=0\\
&\iff 1-3z-z^2+z^3=0\\
&\iff (z+1)(z^2-4z+1)=0\\
&\iff z+1=0 \quad \text{ou} \quad z^2-4z+1=0\\
&\iff z=-1 \quad \text{ou} \quad z=2-\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z=2+\sqrt{3}
\end{aligned}.$$

Donc $\boxed{S=\left\{-1;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}}$.

3. Déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

$\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i}{1-i} \iff \left(E_{\frac{\pi}{4}}\right)$ donc

$\left\{-1;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}=\left\{\tan\dfrac{\pi}{12};\tan\dfrac{5\pi}{12};\tan\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Or $\tan\dfrac{3\pi}{4}=-1$ donc $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ ou $2+\sqrt{3}$.

De plus, $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{5\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ et la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\dfrac{\pi}{12}<\tan\dfrac{5\pi}{12}$.

Or $2-\sqrt{3}<2+\sqrt{3}$ donc $\boxed{\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}}$.