Thème : analyse

TD 8 : Primitives

OBJECTIFS :

- AN 14-1 et AN 14-2 : Calculer une primitive ou une intégrale d'une fonction usuelle, d'une fonction rationnelle.
- AN 16-1 et AN 16-2 : Calculer une primitive ou une intégrale par intégration par parties ou par changement de variable
- AN 16-3 : Etablir une relation de récurrence vérifiée par une suite.

EXERCICE 1

Calculer une primitive de chacune des fonctions f suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-2}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2}{4x^2+9}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+7}{x^2+9}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-3x-4}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2+4x+7}$
7. $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{2x^2+1}$

EXERCICE 2

Calculer les intégrales et primitives suivantes en utilisant un changement de variable :

1. $F : x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{1}{\cos t}dt$, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, en posant $u = \sin t$.
2. $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$, en posant $t = 1+\sqrt{x}$.
3. $F : x \mapsto \displaystyle\int^x \cos(\ln t)dt$, pour tout $x \in]0;+\infty[$, en posant $u = \ln t$.
4. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$, en posant $t = \dfrac{\pi}{4} - x$.
5. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$, en posant $t = \pi - x$.
6. Soit $a \in [1;+\infty[$, $I_a = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{Arctan(t)}{t}dt$, en posant $x = \dfrac{1}{t}$.

EXERCICE 3

Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} Arccos(t)dt$
2. $F : x \mapsto \displaystyle\int^x e^{-\sqrt{t}}dt$, pour tout $x \in]0;+\infty[$.
3. $F : x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$, pour tout $x \in]0;+\infty[$.
4. $F : x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{1}{ch(t)}dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} tArctan(t)dt$
6. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\tan^2 x)dx$.
7. $F : x \mapsto \displaystyle\int^x \ln(1+t^2)dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8. $F : x \mapsto \int^{x} \frac{t^2+3t+1}{t^2-1} dt$.
9. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$.
10. $I = \int_0^1 (x^2-3)e^x dx$
11. $F : x \mapsto \int^{x} \frac{1}{\sin t} dt$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
12. $F : x \mapsto \int^{x} \cos^5 t dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On considère les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.
   (a) Calculer $I+J$.
   (b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = J$ et en déduire leur valeur commune.
   (c) Donner, sans faire de calcul de primitive, la valeur de $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x dx$.
2. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ telle que pour tout $x \in [a; b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.
   Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$ et en déduire la valeur de $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

EXERCICE 5

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.
   Etablir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_0^{\pi} x^n \cos x dx$.
   Etablir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{2n} en fonction de n.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de u_{2n+1} en fonction de n.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = Arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $[0; +\infty[$.
2. (a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer sa dérivée.
   (b) En déduire que $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \frac{\pi}{2} - 2Arctan(\sqrt{x})$.
3. Le but de cette question est de déterminer une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
   (a) Justifier qu'une telle primitive existe.
   On admet que les primitives déterminées dans les questions b, c et d suivantes existent.
   (b) Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{t^2+1}$ sur $[0; +\infty[$.
   (c) Déterminer alors une primitive de la fonction $t \mapsto 2tArctan(t)$ sur $[0; +\infty[$.
   (d) En posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $\int^{x} Arctan(\sqrt{t}) dt$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.
   (e) Conclure.