Thème : Analyse

TD 4 : Généralités sur les fonctions d'une variable réelle

OBJECTIFS :

- AN 7-1 : Calculer des dérivées sans aucune difficulté.
- AN 7-2, AN 7-3, AN 7-4 : Démontrer et exploiter les propriétés d'une fonction (parité, périodicité, majoration et minoration).
- AN 7-5 : Calculer les limites d'une fonction et en donner une interprétation graphique.
- AN 7-6, AN 7-7 : Etudier la bijectivité d'une fonction et déterminer sa fonction réciproque.
- AN 7-8 : Etudier la dérivabilité d'une fonction réciproque et calculer sa dérivée.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) On suppose que f et g sont paires.
   Que peut-on dire de la parité de $f+g$, de $f\times g$ et de $f\circ g$?
   (b) On suppose que f et g sont impaires.
   Que peut-on dire de la parité de $f+g$, de $f\times g$ et de $f\circ g$?
2. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer son ensemble de définition puis étudier sa parité.
   (a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$
   (b) $f : x \mapsto x\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$
   (c) $f : x \mapsto x+\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$
   (d) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
   (e) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$
   (f) $f : x \mapsto \dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$

Exercice 2

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\cos(2x)+\sin(4x)$ est périodique.
2. Montrer que la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, d(x)=\lfloor x\rfloor - x$ est périodique.
3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x\in\mathbb{R}, f(a+x)=-f(x)$. Montrer que f est $2a-$périodique.

Exercice 3

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) On suppose que f et g sont bornées. Les fonctions $f+g$, $f\times g$ et $f\circ g$ sont-elles bornées ?
   (b) On suppose que f et g sont majorées. Les fonctions $f+g$, $f\times g$ et $f\circ g$ sont-elles majorées ?
2. Les fonctions suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées sur I ?
   (a) $f : x\mapsto e^x\cos x$ et $I=\mathbb{R}$
   (b) $g : x\mapsto \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $I=[0;+\infty[$
   (c) $h : x\mapsto \dfrac{2\sin x-\cos x}{3+e^x}$ et $I=\mathbb{R}$

EXERCICE 4

On note tan, la fonction tangente $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Justifier que la fonction tan est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Etudier la parité et la périodicité de la fonction tan et en déduire qu'on peut l'étudier sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. (a) Justifier que la fonction tan est dérivable sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Etudier son sens de variation.
   (c) Calculer les limites de la fonction tan aux bornes de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et en donner une interprétation graphique.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction tan.

EXERCICE 5

1. Montrer que $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[, \tan x > x$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ est bijective de l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans un intervalle que l'on précisera.

EXERCICE 6

Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection de I dans J, J ensemble à déterminer, puis préciser f^{-1}.

1. f définie sur $I = [2; +\infty[$ par $\forall x \in [2; +\infty[, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
2. f définie sur $I = [1; +\infty[$ par $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 7

Les deux questions sont indépendantes.
On considère la fonction f définie sur $I =]0; +\infty[$ par $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x^2 + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un ensemble J à préciser.
2. Justifier que la fonction réciproque, notée f^{-1}, est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(1)$.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Etudier la parité de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en donner une interprétation graphique.
3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.
5. On pose $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de $u(x)$ et $v(x)$.
   En déduire une expression de f' en fonction de f.
6. Sans calculer f^{-1}, justifier que f^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(f^{-1})'$.
7. Déterminer l'expression de f^{-1}.