TD 3 : Calculs algébriques

Eléments de correction

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

5. $S_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} |j-i|$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}|j-i|\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(j-i)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j - \sum_{i=1}^{j} i\right)$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{12}(2n+1-3) = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}. \text{ Donc } \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}}.$$

8. $S_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} j$

$1 \leq i < j \leq n$ donc $n > 1$, alors $n \geq 2$.

$1 \leq i < j \leq n$ donc $i \in \{1,\dots,n-1\}$ et $j \in \{2,\dots,n\}$.

$$S_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} j = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n} j\left(\sum_{i=1}^{j-1} 1\right) = \sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j.$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} j^2 - 1 - \sum_{j=1}^{n} j + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right).$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n-2}{3}\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

Donc $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}}$.

9. $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\max(i,j)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\max(i,j) + \sum_{i=j+1}^{n}\max(i,j)\right).$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j + \sum_{i=j+1}^{n} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 + \frac{(n+j+1)(n-j)}{2}\right) = \dots = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

(calcul à terminer!)

Remarque :

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

A retenir : $\sum_{i=p}^{n} i = \frac{(n+p)(n-p+1)}{2}$.

EXERCICE 5

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

1. En posant $p = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2n+1-k} = \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}.$$

Donc $\boxed{S_n = \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}}$.

2. En déduire que $2S_n = 2^{2n+1}$ et conclure.

$$2S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} + \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{p} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}$$

$$2S_n = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}1^k 1^{2n+1-k} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}.$$

D'où $\boxed{S_n = 2^{2n}}$.

EXERCICE 6

Soit $n \geq 2$. Calculer les produits suivants :

3. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1}$

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n+1}.$$

Donc $\boxed{P_n = \frac{2}{n(n+1)}}$.

4. $P_n = \prod_{k=1}^{n} (6k-3)$

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (6k-3) = 3^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 3^n (1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1))$$

$$P_n = \frac{3^n \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$$

$$P_n = \frac{3^n (2n)!}{2^n (1 \times 2 \times \cdots \times n)} = \frac{3^n (2n)!}{2^n n!}.$$

Donc $\boxed{P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}}$.

EXERCICE 7

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Factoriser les nombres $k^3 - 1$ et $k^3 + 1$.

   $k^3 - 1 = k^3 - 1^3 = (k-1) \sum_{i=0}^{2} k^i = (k-1)(k^2+k+1)$ et

   $k^3 + 1 = k^3 - (-1)^3 = (k+1) \sum_{i=0}^{2} (-k)^i = (k+1)(k^2-k+1)$.

   Donc $\boxed{k^3 - 1 = (k-1)(k^2+k+1) \text{ et } k^3 + 1 = (k+1)(k^2-k+1)}$.

2. En déduire, sans utiliser de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$$

   .

   Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} \\
&= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}(k+1)} \times \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k^2-k+1)} \\
&= \frac{(n-1)!}{\frac{1}{2}(n+1)!} \times \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k^2-k+1)}
\end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $k = l+1$, on obtient :

$$\prod_{k=2}^{n}(k^2-k+1) = \prod_{l=1}^{n-1}[(l+1)^2-(l+1)+1]$$

Or $\forall l \in \mathbb{N}, (l+1)^2-(l+1)+1 = l^2+l+1$ donc $\prod_{k=2}^{n}(k^2-k+1) = \prod_{l=1}^{n-1}(l^2+l+1)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)}{\prod_{l=1}^{n-1}(l^2+l+1)} \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2+n+1}{3}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}}$.

3. En déduire que la suite $\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}}$ est convergente et déterminer sa limite.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{3n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Donc $\boxed{\text{la suite } \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}} \text{ est convergente de limite égale à } \frac{2}{3}}$.