TD 8 : Primitives.

Eléments de correction

EXERCICE 4

1. On considère les intégrales suivantes : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$.

   (a) Calculer $I+J$.

   $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{I+J=\frac{\pi}{2}}$.

   (b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I=J$ et en déduire leur valeur commune.

   Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. On pose $x=\frac{\pi}{2}-t$. Alors $t=\frac{\pi}{2}-x$.

   Si $x=0$ alors $t=\frac{\pi}{2}$ et si $x=\frac{\pi}{2}$ alors $t=0$.

   La fonction $\phi:t\mapsto\frac{\pi}{2}-t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $dx=\phi'(t)dt=-dt$. Par changement de variable,

   $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-1)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=J$.

   Par conséquent, $\boxed{I=J=\frac{\pi}{4}}$.

   (c) Donner, sans faire de calcul de primitive, la valeur de $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 x\,dx$.

   $K=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2x)\,dx$.

   Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. On pose $x=\frac{t}{2}$. Alors $t=2x$.

   Si $x=0$ alors $t=0$ et si $x=\frac{\pi}{2}$ alors $t=\pi$.

   La fonction $\phi:t\mapsto\frac{t}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et $dx=\phi'(t)dt=\frac{1}{2}dt$. Par changement de variable, $K=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$.

   Alors d'après la relation de Chasles,

   $K=\frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 t\,dt\right)$.

   Montrons que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 t\,dt=J$ avec un changement de variable.

   Soit $t\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Posons $s=t-\frac{\pi}{2}$. Alors $t=s+\frac{\pi}{2}$.

   Si $t=\frac{\pi}{2}$ alors $s=0$ et si $t=\pi$ alors $s=\frac{\pi}{2}$.

   La fonction $\phi:t\mapsto s+\frac{\pi}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $dt=\phi'(s)ds=ds$. Par changement de variable,

   $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(s+\frac{\pi}{2}\right)\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 s\,ds=J$.

   D'où $\boxed{K=\frac{1}{8}(I+J)=\frac{\pi}{16}}$.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a\leq b$ et $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ telle que pour tout $x\in[a;b]$, $f(a+b-x)=f(x)$.

   Montrer que $\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ et en déduire la valeur de $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

   La fonction f et la fonction identité sont continues sur $[a,b]$ donc $\int_a^b xf(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx$ existent.

   $\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b xf(a+b-x)dx$. Soit g la fonction définie sur $[a;b]$ par $\forall x\in[a;b], g(x)=f(a+b-x)$.

   Soit $x\in[a;b]$. On pose $t=a+b-x$. Alors $x=a+b-t$.

   Si $x=a$ alors $t=b$ et si $x=b$ alors $t=a$.

   Soit $\phi:t\mapsto a+b-t$. ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ et $\forall t\in[a;b],\phi'(t)=-1$.

Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)dx &= \int_a^b xf(a+b-x)dx\\ &= \int_b^a (a+b-t)f(t)\times(-1)dt\\ &= \int_a^b (a+b-t)f(t)dt\\ &= (a+b)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt\end{aligned}.$$

D'où $2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(t)dt$.

Ainsi $\boxed{\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx}$.

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $\forall x\in[0;\pi], f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$.

f est continue sur $[0;\pi]$ en tant que qoutient de fonctions continues sur $[0;\pi]$

dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x\in[0;\pi], f(0+\pi-x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \frac{\sin x}{1+(-\cos x)^2} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = f(x)$.

Alors
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \int_0^\pi xf(x)dx\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)dx\\ &= -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}dx\\ &= \frac{\pi}{2}\Big[-Arctan(\cos x)\Big]_0^\pi\\ &= \frac{\pi}{2}(-Arctan(-1)+Arctan(1))\\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}.$$

Donc $\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$.

EXERCICE 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

   A l'aide d'une intégration par parties, on montre que $\boxed{u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}u_n}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Exprimer u_{2n} en fonction de n.

   Soit $n\in\mathbb{N}$.

   D'après la question précédente, $\forall k\in[\![1;n]\!], u_{2k} = \frac{2k-1}{2k}u_{2k-2}$ donc

   $u_{2n} = \frac{2n-1}{2n}u_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}u_{2n-4} = \cdots = \frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\cdots\times\frac{1}{2}u_0$.

   Ainsi $u_{2n} = \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\cdots\times 2\times 1}{(2n)^2\times(2n-2)^2\times\cdots 2^2}u_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}u_0$.

   Or $u_0 = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}}$.

3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.

   D'après la question 1, $\forall n\in\mathbb{N}, (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

   Donc $\forall n\in\mathbb{N}, (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_n u_{n+1}$.

   La suite $((n+1)u_n u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante de premier terme égal à $(0+1)u_0 u_1 = \frac{\pi}{2}$.

   Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, (n+1)u_n u_{n+1} = \frac{\pi}{2}}$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. En déduire la valeur de u_{2n+1} en fonction de n.

   D'après la question précédente, $(2n+1)u_{2n}u_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

   Or $u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{u_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\forall x\in[0;+\infty[, f(x)=Arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $[0;+\infty[$.

   Notons $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de f.

   Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$x\in\mathscr{D} \iff \begin{cases} 1+x\neq 0 \\ -1\leq \frac{1-x}{1+x}\leq 1\end{cases} \iff \begin{cases} x\neq -1 \\ \frac{2}{1+x}\geq 0 \quad \text{et} \quad -\frac{2x}{1+x}\leq 0\end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ x<-1 \quad \text{ou} \quad x\geq 0\end{cases} \iff x\geq 0.$$

   Donc $\mathscr{D}=[0;+\infty[$. Ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur } [0;+\infty[}$.

2. (a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer sa dérivée.

   Notons $\mathscr{D}'$ l'ensemble de définition de f.

   Soit $x\in[0;+\infty[$.

$$x\in\mathscr{D}' \iff -1<\frac{1-x}{1+x}<1 \iff \begin{cases} -1<\frac{1-x}{1+x} \\ \frac{1-x}{1+x}<1\end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2}{1+x}>0 \\ -\frac{2x}{1+x}<0\end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ x<-1 \quad \text{ou} \quad x>0\end{cases} \iff x>0.$$

   Donc $\mathscr{D}'=]0;+\infty[$. Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[}$.

   Soit $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}}=\dfrac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{\sqrt{\frac{4x}{(1+x)^2}}}=-\dfrac{2}{(1+x)^2}\times\dfrac{|1+x|}{2\sqrt{x}}$.

   Or $|1+x|=1+x$ car $x>0$. Donc $\boxed{\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}$.

   (b) En déduire que $\forall x\in[0;+\infty[, f(x)=\frac{\pi}{2}-2Arctan(\sqrt{x})$.

   Soit $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}$.

   Donc f' est de la forme $-2\dfrac{u'}{1+u^2}$ avec $u:x\mapsto\sqrt{x}$.

   Ainsi $\exists k\in\mathbb{R}/\forall x\in]0;+\infty[, f(x)=-2Arctan(\sqrt{x})+k$.

   Or f est continue sur $[0;+\infty[$ (ceci est correctement justifié à la question suivante) donc $\exists k\in\mathbb{R}/\forall x\in[0;+\infty[, f(x)=-2Arctan(\sqrt{x})+k$.

   De plus, $f(0)=Arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$ donc $k=\frac{\pi}{2}+2Arctan(\sqrt{0})=\frac{\pi}{2}$.

   Ainsi $\boxed{\forall x\in[0;+\infty[, f(x)=\frac{\pi}{2}-2Arctan(\sqrt{x})}$.

3. Le but de cette question est de déterminer une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

   (a) Justifier qu'une telle primitive existe.

   La fonction $x\mapsto\dfrac{1-x}{1+x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, elle est à valeurs dans $[-1;1]$. Or la fonction $Arcsin$ est continue sur $[-1;1]$ donc f est continue sur $[0;+\infty[$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } [0;+\infty[}$.

   On admet que les primitives déterminées dans les questions b, c et d suivantes existent.

   (b) Déterminer une primitive de la fonction $t\mapsto\dfrac{t^2}{t^2+1}$ sur $[0;+\infty[$.

   Soit $x\in[0;+\infty[$.

$$\int^x\frac{t^2}{t^2+1}dt=\int^x\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=\int^x\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=x-Arctan x.$$

   Donc $\boxed{\forall x\in[0;+\infty[, \int^x\frac{t^2}{t^2+1}dt=x-Arctan x}$.

(c) Déterminer alors une primitive de la fonction $t \mapsto 2tArctan(t)$ sur $[0;+\infty[$.

Soit $x \in [0;+\infty[$.

On calcule $\int^x 2tArctan(t)dt$. Soit $t \in [0;+\infty[$.

On pose $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = Arctant \end{cases}$. Alors $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$.

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$. Alors par IPP,

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t^2}{t^2+1}dt &= \left[t^2 Arctant\right]^x - \int^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \\ &= x^2 Arctanx - x + Arctanx \end{aligned}.$$

Donc $\boxed{\text{une primitive de de la fonction } t \mapsto 2tArctan(t) \text{ sur } [0;+\infty[}$ $\boxed{\text{est la fonction } x \mapsto (x^2+1)Arctanx - x}$.

(d) En posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $\int^x Arctan(\sqrt{t})dt$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.

Soit $t \in [0;+\infty[$. Posons $u = \sqrt{t}$. Alors $u \in [0;+\infty[$ et $t = u^2$.

Soit $\phi : u \mapsto u^2$, ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et $dt = \phi'(u)du = 2udu$.

Soit $x \in [0;+\infty[$. Par changement de variable,

$$\begin{aligned} \int^x Arctan(\sqrt{t})dt &= \int^{\sqrt{x}} Arctan(u) \times 2udu \\ &= \left[(u^2+1)Arctanu - u\right]^{\sqrt{x}} \\ &= (x+1)Arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int^x Arctan(\sqrt{t})dt = (x+1)Arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x}}$.

(e) Conclure.

Soit $x \in [0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \int^x f(t)dt &= \int^x \left(\frac{\pi}{2} - 2Arctan(\sqrt{t})\right)dt \\ &= \frac{\pi}{2}x - 2(x+1)Arctan(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \end{aligned}.$$

Donc $\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } [0;+\infty[\text{ est la fonction}}$ $\boxed{x \mapsto \frac{\pi}{2}x - 2(x+1)Arctan(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x}}$.