Thème : analyse

TD 9 : Equations différentielles d'ordre 1

OBJECTIFS :

- AN 18-1 : Résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.
- AN 18-2 : Trouver une solution particulière évidente d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- AN 18-3 : Déterminer une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.
- AN 18-4 : Résoudre un problème de Cauchy.
- AN 18-5 : Résoudre une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 à l'aide d'un changement de fonction inconnue.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^x$.
Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est une solution.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes, les solutions étant à valeurs dans $\mathbb{R}$:

1. $xy' - y = x^2 \cos x$ sur $]0;+\infty[$.
2. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$.
4. $(\cos x)y' + (\sin x)y = 1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. $(t^2+1)y' + 2ty = 1$ sur $\mathbb{R}$.
6. $y'\sqrt{1-x^2} + y = 1$ sur $]-1;1[$.
7. $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$ sur $]0;+\infty[$.
8. $2(t^2 - t)y' - y = t^2(t-1)\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$ sur $]0;1[$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants, les solutions étant à valeurs réelles :
   (a) $\left\{\begin{array}{rcl} y' - 2y &=& 2x+1 \\ y(0) &=& 1 \end{array}\right.$
   (b) $\left\{\begin{array}{rcl} y' - 2y &=& e^x \\ y(0) &=& 1 \end{array}\right.$
2. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = b$ dans chacun des cas suivants, les solutions étant à valeurs réelles :
   (a) $b(x) = \sin x$
   (b) $b(x) = xe^x + e^{2x}$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes, les solutions étant à valeurs dans $\mathbb{R}$:

1. $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1;+\infty[$.
2. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ sur $]0;+\infty[$.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Déterminer les courbes d'équation $y = f(x)$ avec f fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant la propriété géométrique suivante :
"Soit M un point parcourant la courbe de f. Si T est le point d'intersection de la tangente à la courbe de f en M avec l'axe (Ox) et si P est le projeté orthogonal de M sur (Ox) alors O est le milieu de $[PT]$."

EXERCICE 6

On souhaite résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - \dfrac{y}{x} - y^2 = -9x^2$ sur $]0;+\infty[$.

1. Déterminer le réel $a \in]0;+\infty[$ tel que la fonction $f_0 : x \mapsto ax$ soit une solution particulière de (E) sur $]0;+\infty[$.
2. (a) Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \neq f_0(x)$.
   Montrer que la fonction f est solution de (E) sur $]0;+\infty[$ ssi la fonction $g = \dfrac{1}{f_0 - f}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : z' + \left(6x + \dfrac{1}{x}\right)z = 1$ sur $]0;+\infty[$.

   (b) Résoudre l'équation (E') sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E) sur $]0;+\infty[$.