TD 9 : Equations différentielles d'ordre 1.

Eléments de correction

EXERCICE 4

Résoudre les équations différentielles suivantes, les solutions étant à valeurs dans $\mathbb{R}$:

1. $(1+x)^2y''+(1+x)y'-2=0$ sur $]-1;+\infty[$.

   Soit $x\in]-1;+\infty[$.

   $$(E):(1+x)^2y''+(1+x)y'-2=0 \iff \begin{cases} z=y' \\ (F):(1+x)^2z'+(1+x)z=2 \end{cases}$$

   On résout (F) et on obtient $S_{]-1;+\infty[}(F)=\left\{x\mapsto \dfrac{C+2\ln(x+1)}{x+1}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

   Or $$\begin{aligned}\int^x \frac{C+\ln(t+1)}{t+1}dt &= \int^x \frac{C}{t+1}dt+\int^x 2\frac{\ln(t+1)}{t+1}dt \\ &= C\ln|x+1|+[\ln(x+1)]^2 \\ &= C\ln(x+1)+[\ln(x+1)]^2\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{S_{]-1;+\infty[}(E)=\left\{x\mapsto C\ln(x+1)+[\ln(x+1)]^2+D, (C,D)\in\mathbb{R}^2\right\}}$.

2. $x^2+y^2-2xyy'=0$ sur $]0;+\infty[$.

   Soit $x\in]0;+\infty[$.

   $$(E):x^2+y^2-2xyy'=0 \iff \begin{cases} z=y^2 \\ (F):xz'-z=x^2 \end{cases}$$

   On résout (F) et on obtient $S_{]0;+\infty[}(F)=\left\{x\mapsto Cx+x^2, C\in\mathbb{R}\right\}$.

   Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $]0;+\infty[$ telles que $\forall x\in]0;+\infty[, (f(x))^2=Cx+x^2$ avec $C\in\mathbb{R}$.

   Pour pourvoir utiliser la fonction racine carrée, il faut avoir $\forall x\in]0;+\infty[, Cx+x^2\geq 0$.

   Soit $x\in]0;+\infty[, Cx+x^2\geq 0 \iff x(x+C)\geq 0 \iff x+C\geq 0 \iff C\geq -x$.

   Donc C est supérieur à tout nombre strictement négatif.

   Ainsi $Cx+x^2\geq 0 \iff C\geq 0$.

   Donc $\boxed{S_{]0;+\infty[}(E)=\left\{x\mapsto \sqrt{Cx+x^2}, C\in\mathbb{R}_+; x\mapsto -\sqrt{C'x+x^2}, C'\in\mathbb{R}_+\right\}}$.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer les courbes d'équation $y=f(x)$ avec f fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant la propriété géométrique suivante :

"Soit M un point parcourant la courbe de f. Si T est le point d'intersection de la tangente à la courbe de f en M avec l'axe (Ox) et si P est le projeté orthogonal de M sur (Ox) alors O est le milieu de $[PT]$."

Raisonnons par analyse-synthèse.

- Analyse : Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la courbe $\mathscr{C}$ vérifie la propriété demandée.

  Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $t\in]0;+\infty[$. Alors la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M a pour équation $y=f'(t)(x-t)+f(t)$.

  Supposons que f' ne s'annule pas en t alors le point T, intersection de la tangente et de l'axe des abscisses, a pour coordonnées $\left(-\dfrac{f(t)}{f'(t)}+t;0\right)$.

  Le point P, projeté orthogonal de M sur l'axe (Ox) a pour coordonnées $(t;0)$.

  Alors O milieu de $[PT] \iff \begin{cases} x_P+x_T=0 \\ y_P+y_T=0 \end{cases} \iff -\dfrac{f(t)}{f'(t)}+t+t=0$.

  O milieu de $[PT] \iff f'(t)-\dfrac{1}{2t}f(t)=0 \iff f$ solution de $(E): y'-\dfrac{1}{2t}y=0$.

  Donc O milieu de $[PT] \iff \exists C\in\mathbb{R}/\forall t\in]0;+\infty[, f(t)=C\sqrt{t}$.

- Synthèse : Soit $C\in\mathbb{R}$ et $f:x\mapsto C\sqrt{x}$ fonction définie sur $]0;+\infty[$.

  Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

  f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{C}{2\sqrt{x}}$.

  Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

  Alors la tangente à $\mathscr{C}$ au point M a pour équation $y=\dfrac{C}{2\sqrt{a}}(x-a)+C\sqrt{a}$.

  Donc T a pour coordonnées $(-a;0)$ et P a pour coordonnées $(a;0)$.

  Ainsi O est le milieu de $[PT]$.

  Donc $\boxed{\text{les fonctions cherchées sont les fonctions } f \text{ définies sur }]0;+\infty[\text{ par}}$

  $\boxed{\forall x\in]0;+\infty[, f(x)=C\sqrt{x}, C\in\mathbb{R}.}$