TD 10

Eléments de correction

EXERCICE 2

Soit E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$.

1. Soit $(A,B) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2$.
   (a) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
   En classe.
   (b) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   En classe.
   (c) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors $\exists x \in A \cap B / f(x) = y$.
   $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$. Alors $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(B)$.
   Donc $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$.
   Ainsi $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)}$.

   Remarque :
   Après avoir vu la partie 2 du chapitre Applications, vous pourrez montrer qu'il y a égalité si f est injective sur E.

   Montrons qu'il existe deux parties A et B de E telles que $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.
   Posons $A = \{1;2\}$ et $B = \{-2;1\}$ et $f : x \mapsto x^2$, fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Alors $f(A) = f(B) = \{1;4\}$. Donc $f(A) \cap f(B) = \{1;4\}$.
   De plus, $A \cap B = \{1\}$ donc $f(A \cap B) = \{1\}$.
   Ainsi $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

2. Soit $(C,D) \in \left(\mathscr{P}(F)\right)^2$.
   (a) Montrer que $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$. La réciproque est-elle vraie ?
   En classe.
   (b) Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
   En classe.
   (c) Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
   Soit $x \in E$.
   $$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \cap D \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}.$$
   Donc $\boxed{f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)}$.

EXERCICE 3

3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 forment un triangle équilatéral.

- Si $z=0$ ou $z=1$, alors M, P et Q sont confondus et M, P et Q ne forment pas un triangle.
- Si $z=-1$, alors M et Q sont confondus et M, P et Q ne forment pas un triangle.
- Si $z \neq 0$, $z \neq 1$ et $z \neq -1$, alors M, P et Q sont distincts 2 à 2.

$$MPQ \text{ est un triangle équilatéral} \Leftrightarrow \begin{cases} MP = MQ \\ (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}) = \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_Q - z_M}{z_P - z_M}\right| = 1 \\ arg\,\frac{z_Q - z_M}{z_P - z_M} = \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \frac{z_Q - z_M}{z_P - z_M} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z_Q - z_M}{z_P - z_M} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z+1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } z+1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'ensemble des points M tels que MPQ soit équilatéral est formé des points $A\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

EXERCICE 4

Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z non nul, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\frac{1}{\overline{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = z \iff -\frac{1}{\overline{z}} = z \iff z\overline{z} = -1 \iff |z|^2 = -1$.

   Or $|z|^2$ est un réel positif donc l'équation $f(z) = z$ n'a pas de solution.

   Donc $\boxed{\text{l'ensemble des points invariants par } f \text{ est l'ensemble vide}}$.

2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{z'+1} = \frac{z-1}{z}$ puis que $\forall z \in \mathbb{C}^*, |z'+1| = |z'| \iff |z-1| = 1$.

   Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z'+1} = \overline{-\frac{1}{\overline{z}} + 1} = -\frac{1}{z} + 1 = \frac{z-1}{z}$.

   Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} |z'+1| = |z'| &\iff |\overline{z'+1}| = |z'| \\ &\iff \left|\frac{z-1}{z}\right| = \left|-\frac{1}{\overline{z}}\right| \\ &\iff \frac{|z-1|}{|z|} = \frac{1}{|\overline{z}|} \\ &\iff \frac{|z-1|}{|z|} = \frac{1}{|z|} \\ &\iff |z-1| = 1 \end{aligned}.$$

   Donc $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{z'+1} = \frac{z-1}{z} \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}^*, |z'+1| = |z'| \iff |z-1| = 1}$

3. Soit M un point d'affixe z non nul et M' d'affixe z' son image par f.

   (a) Etablir une relation entre OM et OM'.

   $z' = -\frac{1}{\overline{z}}$ donc $OM' = |z'| = \left|-\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{1}{|\overline{z}|} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{OM}$.

   Donc $\boxed{OM' = \frac{1}{OM}}$.

   (b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et en donner une interprétation géométrique.

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi] &\iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg\left(-\frac{1}{z\overline{z}}\right)[2\pi] \\ &\iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg\left(-\frac{1}{|z|^2}\right)[2\pi] \\ &\iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \pi[2\pi] \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{les points } O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés avec } O \in [MM']}$.

4. Soit A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1. Construire l'image M' par f d'un point M quelconque, distinct de O, appartenant à $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}\setminus\{O\} &\iff \begin{cases} M \neq O \\ AM = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z \in \mathbb{C}^* \\ |z-1| = 1 \end{cases} \\ &\iff |z'+1| = |z'| \\ &\iff BM' = OM' \quad \text{avec } B \text{ le point d'affixe } -1. \end{aligned}$$

   Donc M' appartient à la médiatrice du segment $[BO]$.

   Les points O, M et M' sont alignés avec $M' \in [MO)$.

   Ainsi $\boxed{M' \text{est le point d'intersection de la médiatrice du segment } [BO] \text{ et de } [MO)}$.

   Faire une figure en plaçant M où vous voulez!