TD 10

OBJECTIFS :

- AL 19-1, AL 19-2 : Déterminer l'image directe, l'image réciproque d'une partie d'un ensemble par une application.
- G 20-1 : Déterminer des ensembles de points dans le plan complexe.
- G 20-2 : Résoudre des problèmes en utilisant les propriétés des arguments.
- G 20-3 : Résoudre des problèmes géométriques faisant intervenir les transformations usuelles.

Applications (partie 1)

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$.
   Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f\big([-4;0]\big)$, $f\big(]-2;+\infty[\big)$, $f^{-1}(\{-5\})$, $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}\big([0;+\infty[\big)$.
2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(\pi x)$.
   (a) Déterminer l'image directe de $]0;1]$ par f.
   (b) Déterminer l'image réciproque de $\{0\}$ puis de $[0;1]$ par f.
3. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x - 3y$.
   Déterminer $f(\Delta)$ avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ et $f^{-1}(\{0\})$.
4. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, 2x+y)$.
   (a) Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$. Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.
   (b) Soit $\Delta' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 1\}$. Déterminer $f(\Delta')$ et $f^{-1}(\Delta')$.

Exercice 2

Soit E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$.

1. Soit $(A,B) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^2$.
   (a) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (c) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

   Remarque :
   Après avoir vu la partie 2 du chapitre Applications, vous pourrez montrer qu'il y a égalité si f est injective sur E.

2. Soit $(C,D) \in \big(\mathscr{P}(F)\big)^2$.
   (a) Montrer que $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
   (c) Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Nombres complexes et géométrie.

Pour les exercices 3 à 7, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 3

Les questions sont indépendantes.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3i$ et $z_B = -1$.
Soit f l'application, qui à tout point M d'affixe $z, z \neq z_B$, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{iz+3}{z+1}$.

1. Exprimer le module de z' en fonction de AM et BM puis un argument de z' en fonction de $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixe z tels que z' soit un réel strictement positif.

EXERCICE 4

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points A d'affixe i, M et N d'affixe iz soient alignés.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 forment un triangle rectangle en P.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 forment un triangle équilatéral.

EXERCICE 5

Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z non nul, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{z'+1} = \dfrac{z-1}{z}$ puis que $\forall z \in \mathbb{C}^*, |z'+1| = |z'| \Longleftrightarrow |z-1| = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z non nul et M' d'affixe z' son image par f.
   (a) Etablir une relation entre OM et OM'.
   (b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et en donner une interprétation géométrique.
4. Soit A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.
   Construire l'image M' par f d'un point M quelconque, distinct de O, appartenant à $\mathscr{C}$.

EXERCICE 6

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1, -1-2i$ et i.
soit $z \in \mathbb{C}$. Soit M le point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par une transformation.

1. On considère la transformation T d'écriture complexe $z' = iz - 2 + i$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
2. On considère la transformation laissant le point A invariant et transformant C en B.
   On admet que cette transformation T' a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
   Déterminer l'écriture complexe de T' et montrer que T' est la composée de deux transformations simples.

EXERCICE 7

On considère $A(-1+i)$ et $B(1+4i)$.

1. Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Déterminer l'écriture complexe de R.
   (b) Déterminer l'affixe du point C, image du point B par la rotation R.
2. On pose $\vec{w} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Soit D l'image du point C par la translation t de vecteur $\vec{w}$. Déterminer l'affixe du point D.
3. On considère la transformation T d'écriture complexe $z' = \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}i$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
4. On note E l'image du point C par la transformation T.
   Montrer que les points A, D et E sont alignés.