Cahier de vacances mathématiques pour les futurs étudiants en PTSI

Lycée Ozanam – Site Icam Lille

2025 - 2026

C. HÉDIN

Le mot du professeur

Consignes à lire attentivement

Tout d'abord, permettez-moi de vous féliciter pour l'obtention de votre baccalauréat et de vous souhaiter la bienvenue en classe préparatoire PTSI.

Nous constatons, depuis quelques années, que les élèves ont des difficultés en calculs.
Et ceci a des répercussions dans toutes les matières scientifiques.
D'où l'idée de vous proposer ce cahier de calculs. [1]

Ce document est donc un outil qui va vous permettre de vous améliorer en calcul et également de repérer les notions du collège ou du lycée qui n'ont pas été acquises.
Vous irez alors chercher et retravailler le cours correspondant avant de revenir à ce document.

Conseils :

- Il est conseillé de travailler un peu tous les jours les exercices.
  Cette régularité dans le travail vous permettra d'acquérir des automatismes de calcul.
- Avant de commencer les fiches, vérifiez que les tables de multiplication sont parfaitement connues.
  En effet, les fiches doivent être traitées sans utiliser la calculatrice.
  Tout au long de l'année, la calculatrice sera interdite dans les devoirs de mathématiques.
- Des rappels de cours sont faits dans les pages 24 à 29 sur les fonctions usuelles (fonction cosinus, fonction sinus, fonction exponentielle, fonction logarithme népérien) et sur les suites arithmétiques et géométriques.
- Vous n'êtes pas obligé de faire les exercices dans leur intégralité si vous n'en ressentez pas le besoin.
  En effet, si par exemple, vous êtes à l'aise avec la factorisation ou les dérivées, vous n'en faites que quelques-unes pour vérifier que la notion est bien acquise et vous passez à la suite.
- Un corrigé sera mis en ligne sur ce site après la mi-août.
  Vous pourrez retravailler les fiches qui vous ont posé problème.

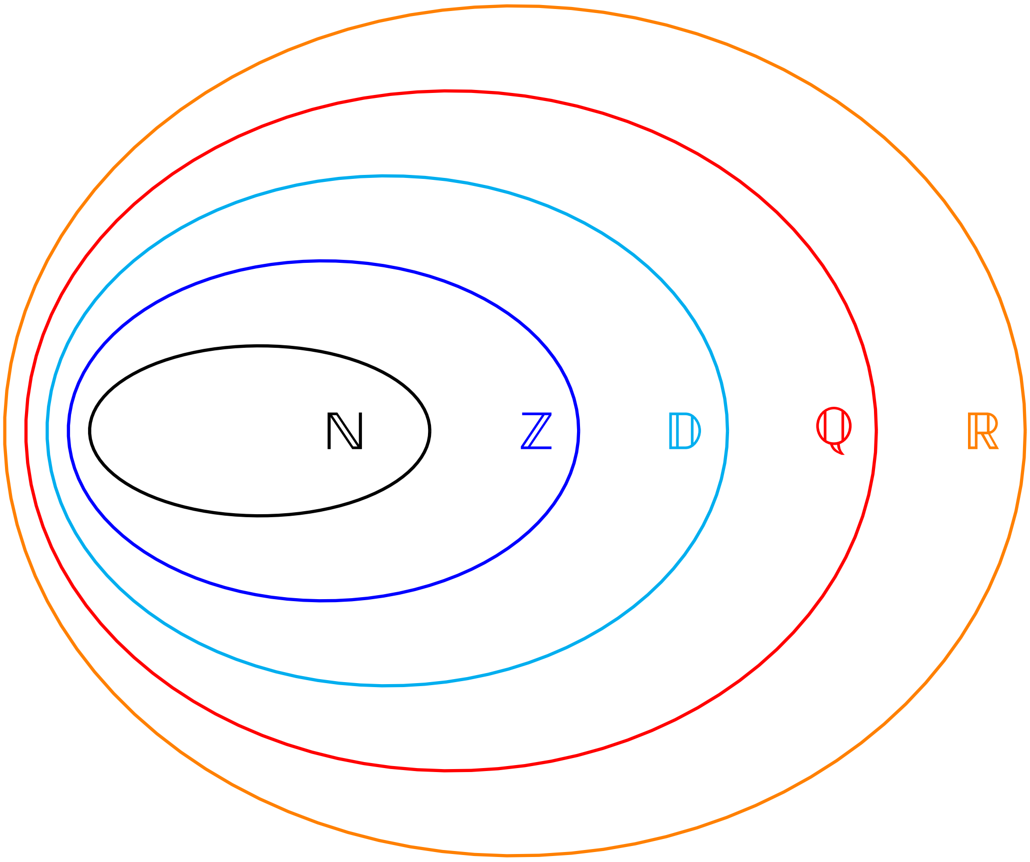
A la rentrée, il sera considéré que tout ce qui est dans ces fiches est acquis.

1. Ce document a été créé à partir des cahiers `https://colasbd.github.io/cdc/` et `https://colasbd.github.io/cde/`.

Fiche n°1

Ensembles de nombres

1. Placer les nombres suivants dans le schéma ci-dessous :
   - $A = 3,521$
   - $B = \sqrt{5} + 2$
   - $C = 1 - \sqrt{49}$
   - $D = 6,31 \times 10^{14}$
   - $E = \dfrac{3}{4}$
   - $F = \dfrac{4}{3}$
   - $G = 5,437437\cdots$
   - $H = -\dfrac{\pi}{12}$
   - $I = -\sqrt{169}$
   - $J = \dfrac{\sqrt{81}}{3}$



2. Soit a et b deux réels tels que $\dfrac{1}{2} \leq a \leq 1$ et $3 \leq b \leq 4$. Encadrer $2a - b$ et $\dfrac{4a-1}{b+1}$.

Fiche de calcul n°2

Fractions

1. Ecrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.
   - $\dfrac{36}{25}\times\dfrac{15}{12}\times 5=$
   - $-\dfrac{2}{15}\div\left(\dfrac{-6}{5}\right)=$
   - $\dfrac{1978\times1979+1980\times21+1958}{1980\times1979-1978\times1979}=$
   - $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}=$
   - $\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}}\div\dfrac{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}}=$
2. En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.
   - $\dfrac{2022}{(-2022)^2-2021\times2023}=$
   - $\dfrac{2021^2}{2020^2+2022^2-2}=$
3. Ma grand-mère (Mémé pour les intimes) va très bien merci ! Elle a même gardé son horrible goût pour les fractions.

   Et quand on lui demande son âge, elle répond : $\dfrac{2\times\left(-\dfrac{6}{11}\right)+\dfrac{\dfrac{6}{11}+3}{4}}{\dfrac{5}{408}\times\left(-\dfrac{6}{11}\right)+\dfrac{\dfrac{6}{11}+2}{544}}$. Quel est l'âge de Mémé ?
4. Soit a, b, c et d des réels avec b, c et d non nuls. Simplifier les nombres suivants :
   - $A=\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}$
   - $B=\dfrac{a}{\dfrac{b}{\dfrac{c}{d}}}$
   - $C=\dfrac{\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c}}{d}$
   - $D=\dfrac{\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}}}{d}$
5. Soit $k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

   Ecrire les fractions suivantes sous la forme $a+\dfrac{b}{c}$ avec a et b des entiers et c un réel.
   - $\dfrac{k}{k-1}=$
   - $\dfrac{3x-1}{x-2}=$

1. Simplifier les expressions suivantes :
   - $A(n) = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - $B(n) = \dfrac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   - $C(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
   - $D(x) = \dfrac{x-2}{2x} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{3-x}{3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   - $E(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$.
   - $F(x) = \dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3x+2}{3x+1} = \dfrac{x-1}{x+2}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   - $\dfrac{(x-4)(x+1)}{2x+1} > 0$.
   - $\dfrac{x-3}{2-x} \leq 2$.

Comparer les fractions suivantes avec le signe " > ", " < " ou " = ".

- $\dfrac{3}{5} \cdots \dfrac{5}{9}$
- $\dfrac{12}{11} \cdots \dfrac{10}{12}$
- $\dfrac{125}{25} \cdots \dfrac{105}{21}$

Fiche de calcul n°3

Puissances

1. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.
   - $\dfrac{(10^5 \times 10^{-3})^5}{(10^{-5} \times 10^3)^{-3}} =$
   - $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \times 5^{28}} =$
2. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \times 3^p$ avec n et p deux entiers relatifs.
   - $\dfrac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}} =$
   - $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} =$
3. Dans chaque cas, simplifier au maximum.
   - $\dfrac{8^3}{4^2} =$
   - $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} =$
   - $\dfrac{8^{17} \times 6^{-6}}{9^{-3} \times 2^{42}} =$
   - $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} =$
   - $\dfrac{55^2 \times 121^{-2} \times 125^2}{275 \times 605^{-2} \times 25^4} =$
   - $\dfrac{12^{-2} \times 15^4}{25^2 \times 18^{-4}} =$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les nombres suivants :
   - $a_n = \dfrac{1}{(-1)^n}$
   - $b_n = (-1)^{n+2}$
   - $c_n = (-1)^{2n}$
   - $d_n = (-1)^{4n+1}$
5. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ tel que $a^5 = 1$. Simplifier les nombres suivants :
   - $A = a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$
   - $B = a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$
   - $C = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4$

Fiche de calcul n°4

Calcul littéral

Développer/Factoriser

1. Soit x un réel.
   Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.
   - $A(x) = -3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-4)$
   - $B(x) = (2x-1)^3$
   - $C(x) = (x^2+x+1)^2$
   - $D(x) = (2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$
2. Soit i un nombre tel que $i^2=-1$. Exprimer les quantités suivantes sous la forme $a+ib$ où a et b sont deux réels.
   - $(3+i)^2$
   - $(3-2i)^3$
   - $(4-5i)(6+3i)$
3. Soit x un réel.
   Factoriser les expressions suivantes :
   - $A(x) = 3x^2-6x$
   - $B(x) = (3x+2)(x-1)+(5x-3)(5x-5)$
   - $C(x) = (2x-3)(2x-4)-(2-x)(4x-2)$
   - $D(x) = 8x+4-(x-5)(2x+1)$
   - $E(x) = (12x-4)(x+2)-7x(3x-1)+(9x-3)(x-1)$
   - $F(x) = 9x^2+49-42x$
   - $G(x) = (2x+1)^2-49$
   - $H(x) = -(3x+5)^2+(1-x)^2$
   - $I(x) = (x+2)(3x-6)+5(4-2x)^2$
   - $J(x) = 3x^2-x+(x+1)(3x-1)$
   - $K(x) = (3x+5)^2-3x-5$
   - $L(x) = 9(x-1)^2-(2x+3)^2$
   - $M(x) = -49x^2+1$
   - $N(x) = (5x-3)(x+1)-(x+1)^2+x^2-1$
   - $O(x) = 2x(4-x)-4+x$
   - $P(x) = x^2+6x+9-(x+3)(x-1)$
   - $Q(x) = x^2+3x+2$
   - $R(x) = -5x^2+6x-1$
   - $S(x) = x^4-1$

Fiche de calcul n°5

Valeur absolue

1. Ecrire les nombres suivants sans valeur absolue :
   - $|-2|$
   - $|\pi - 3|$
   - $|\pi - 4|$
   - $|1-\sqrt{2}|$
2. Compléter le tableau ci-dessous de façon à ce que les propositions écrites sur une même ligne soient équivalentes. Un exemple est donné.

$x \in [\cdots;\cdots]$	$\cdots \leq x \leq \cdots$	x appartient à l'intervalle fermé de centre $\cdots$ et de rayon $\cdots$	$\lvert x-\cdots\rvert \leq \cdots$
$x \in [-1;2]$	$-1 \leq x \leq 2$	Centre : $0,5$ et rayon : $1,5$	$\lvert x-0,5\rvert \leq 1,5$
$x \in [2;4]$			
	$0 \leq x \leq 3$		
		Centre : 1 et rayon : $\frac{5}{2}$	
			$\left\lvert x-\frac{7}{8}\right\rvert \leq \frac{17}{8}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   - $|x-8| = 1$
   - $|1-2x| = |x+3|$
   - $|2-x| < 3$
   - $|3x+4| \geq 5$
   - $|2x-3| \leq |x-1|$
   - $2|x+1| + |5-x| = 8$

Fiche de calcul n°6

Racines carrées

1. Simplifier les nombres suivants.
   - $\sqrt{(-3)^2}$
   - $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$
   - $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}$
   - $\left(\sqrt{6}-3\right)\left(3+\sqrt{6}\right)$
   - $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$
   - $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$
   - $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$
   - $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$
   - $\sqrt{25+36+64}$
   - $\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{45}$
   - $3\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{48}$
   - $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$
2. Comparer, sans calculatrice, $1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
3. Simplifier les expressions suivantes :
   - $A(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.
   - $B(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ pour tout $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$.
   - $C(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Fiche de calcul n°7

Equations du second degré

Rappel : Relations entre les coefficients d'un trinôme et ses racines

Soit α et β deux réels.
Soit a, b et c trois réels avec a non nul.
α et β sont solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$.

Tous les trinômes considérés sont à coefficients réels.
Il est demandé dans cette fiche de trouver les éventuelles racines des trinômes sans passer par la formule qui permet de les calculer avec le discriminant.
Vous utiliserez au besoin les relations entre les coefficients d'un trinôme et ses racines.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
   - $x^2 - 6x + 9 = 0$
   - $9x^2 + 6x + 1 = 0$
   - $x^2 + 4x - 12 = 0$
   - $x^2 - 5x = 0$
   - $2x^2 + 3 = 0$
   - $2x^2 - x - 6 = 0$
2. Former une équation du second degré admettant comme solutions les réels suivants :
   - 9 et 13
   - -11 et 17
   - $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$
3. Déterminer la (ou les) valeur(s) du réel m pour que les équations suivantes admettent une solution double et préciser la valeur de la solution.
   - $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$
   - $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m + 3 = 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   - $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} \leq 0$
   - $-x^2 + 2x + 15 > 0$

Fiche de calcul n°8

Exponentielle et logarithme

1. Ecrire les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et/ou $\ln 3$ et/ou $\ln 5$.
   - $\ln 16$
   - $\ln 512$
   - $\ln(0,125)$
   - $3\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   - $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$
   - $\ln\left(\dfrac{16}{25}\right)$
   - $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\dfrac{98}{99}\right)+\ln\left(\dfrac{99}{100}\right)$
2. Simplifier $A=\ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{20}\right)+\ln\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{20}\right)$.
3. Soit $B=\ln 8-\ln 2+\ln 4-\ln 16$. Montrer que $B\in\mathbb{N}$.
4. Soit $C=\ln\left(\sqrt{5}-1\right)+\ln\left(\sqrt{5}+1\right)$. Montrer qu'il existe a et b deux entiers naturels non nuls tels que $C=a\ln b$.
5. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, \ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln\left(1+e^{x}\right)-x$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   - $\ln(x-3)+\ln(2x+1)=2\ln 2$.
   - $(x-2)\ln(x+1)>0$

1. Ecrire les nombres suivants le plus simplement possible.
   - $e^{3\ln 2}$
   - $e^{-2\ln 3}$
   - $\ln(\sqrt{e})$
   - $e^{\ln 3-\ln 2}$
   - $e^{-\ln(\ln 2)}$
   - $\ln\left(\sqrt{e^4}\right)-\ln\left(\sqrt{e^2}\right)$
   - $\ln\left(\sqrt{e^{-\ln e^2}}\right)$
2. Simplifier chacune des expressions suivantes après avoir déterminé son ensemble de définition :
   - $A(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x)}$
   - $B(x)=e^{x-\ln(x+1)}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :
   - $e^{-x^2+x}=1$
   - $\ln(e^x-2)\geq 0$
   - $e^{3x-5}>12$
   - $e^{1+\ln x}\leq 2$
   - $\dfrac{2e^x-e^{2x}}{x-1}>0$

Fiche de calcul n°9

Trigonométrie

1. Compléter le tableau avec les valeurs exactes (Remarque : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$) :

Angle α en degrés	Angle α en radians	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
0				
	$\frac{\pi}{6}$			
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
60				
	$\frac{\pi}{2}$			
		$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
135				
	$\frac{5\pi}{6}$			
		-1	0	
210				
	$\frac{5\pi}{4}$			
		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
270				
	$\frac{5\pi}{3}$			
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
330				
	2π			

2. Simplifier :
   - $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
   - $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ et $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.
3. Simplifier les expressions suivantes :
   - $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   - $\sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   - $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   - $\cos(x-\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1. Soit $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\theta = \frac{1}{3}$. Calculer la valeur exacte de $\cos\theta$.
2. Résoudre les équations et inéquations suivantes sur l'intervalle I :
   - $2\sin x = 1$ sur $I = [-\pi; \pi]$
   - $1 - \sqrt{2}\cos x = 0$ sur $I = [0; 2\pi]$
   - $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sur $I = [0; 2\pi]$
   - $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
   - $\sin^2 x = \sin x$ sur $I = [-\pi; \pi]$
   - $\sin x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sur $I = [0; 2\pi]$
   - $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ sur $I = [0; 2\pi]$
   - $2\sqrt{3}\cos x + 3 > 0$ sur $I = [0; 2\pi]$
   - $1 - \sqrt{2}\sin 2x < 0$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Fiche de calcul n°10

Dérivation

1. Les propositions suivantes ne sont pas correctes mathématiquement. Les réécrire pour qu'elles le deviennent.
   - La fonction e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction exp est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$.
   - La dérivée de la fonction ln est $\dfrac{1}{x}$.
   - $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   - La suite u_n est croissante.
   - La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. Compléter par f ou $f(x)$:
   - $\cdots$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - $\cdots$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\cdots$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $\cdots \geq 0$ pour tout $x \in [-1;+\infty[$
   - $\cdots \geq 0$ sur $[-1;+\infty[$.
3. Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer sa fonction dérivée :
   - f définie sur $]0;+\infty[$ par $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = x \ln x$.
   - f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} - 3x + 2$.
   - f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(2x+3)$.
   - f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 5x)^4$.
   - f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{e^x + x}{x}$.
   - f définie sur $]1;+\infty[$ par $\forall x \in]1;+\infty[, f(x) = \ln(\ln x)$.
   - f définie sur $]-1;1[$ par $\forall x \in]-1;1[, f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
   - f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.
   - f définie sur $]1;+\infty[$ par $\forall x \in]1;+\infty[, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.
   - f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x+1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   - Déterminer une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   - Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente Δ.

Fiche de calcul n°11

Primitives

1. On admet que les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle I et donc qu'elles admettent des primitives sur cet intervalle. Déterminer une de ces primitives.
   - f est définie sur $I=\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x^2-x+1-e^x$.
   - f est définie sur $I=]0;+\infty[$ par $\forall x\in]0;+\infty[, f(x)=2-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}+\frac{3}{x^2}$.
   - f est définie sur $I=\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(2x+1)^3$.
   - f est définie sur $I=\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=e^{-2x}+e^{3x}$.
   - f est définie sur $I=\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\cos x\sin^2 x$.
   - f est définie sur $I=\left]0;\frac{4}{3}\right[$ par $\forall x\in\left]0;\frac{4}{3}\right[, f(x)=\frac{1}{3x-4}-\frac{1}{x}$.
   - f est définie sur $I=\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x-6}{x^2-4x+5}$.
   - f est définie sur $I=]-1;1[$ par $\forall x\in]-1;1[, f(x)=\frac{8x}{\sqrt{1-x^2}}$.
   - f est définie sur $I=]0;+\infty[$ par $\forall x\in]0;+\infty[, f(x)=\frac{\ln x}{x}$.
2. Calculer les intégrales suivantes. On admet qu'elles sont bien définies.
   - $J=\int_0^1 (x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x$
   - $J=\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$
   - $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x+\cos 4x)\,\mathrm{d}x$
   - $J=\int_{-1}^1 x\left(x^2+1\right)^3\,\mathrm{d}x$
3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties. On admet que ces intégrales sont bien définies.
   - $J=\int_1^e (x\ln x)\,\mathrm{d}x$
   - $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\times\cos x\,\mathrm{d}x$

Fiche de calcul n°12

Suites numériques

Suites explicites/suites récurrentes

1. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :
   - u_0
   - u_1
   - u_{n+1}
   - u_{3n}
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + 3$. Calculer :
   - le troisième terme de (v_n)
   - v_3
3. Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $w_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :
   - le troisième terme de (w_n)
   - w_3
4. Soit $(t_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Exprimer en fonction de n :
   - t_{2n}
   - t_{4n}
5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$.

Suites arithmétiques/suites géométriques

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2. Calculer :
   - le dixième terme de (u_n)
   - $u_0 + u_1 + \cdots + u_{99}$
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r ($r \in \mathbb{R}$) telle que $v_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $v_{103} = \dfrac{3}{4}$.
   - Calculer r.
   - Donner le sens de variation et le terme général de (v_n).
3. Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite géométrique de premier terme $w_1 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.
   - Donner le sens de variation de (w_n).
   - Calculer w_{10}.
   - Calculer $w_1 + w_2 + \cdots + w_{80}$.

Sens de variation et limite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

1. (a) Montrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique.

   (b) Déterminer le terme général de la suite (u_n).
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) puis calculer sa limite, si elle existe.

Suites arithmético-géométriques

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2023 et a enregistré 2500 inscriptions en 2023.
Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents. On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).
On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2023 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2023 + n$.

1. (a) Calculer a_1 et a_2.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire le terme général de la suite (a_n).
   (c) Calculer la limite de la suite (a_n).
   (d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?

Raisonnement par récurrence

Rédaction type :

Exercice : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$.

Correction :
En rouge : les éléments de rédaction que l'on doit retrouver dans toutes les démonstrations par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: " $u_n \in [0,2]$ ".
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

1 Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \in [0,2]$. Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.

2 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie c'est-à-dire que $u_n \in [0,2]$.
Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire que $u_{n+1} \in [0,2]$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in [0,2]$, alors $1 \leq 1+u_n \leq 3$.
Or la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $1 \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{3}$. D'où $0 \leq 1 \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{3} \leq 2$.
Ainsi $u_{n+1} \in [0,2]$. Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

3 Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$.

Pour s'entraîner :

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 8$.
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 + 8 \times 3^n$.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.
   - Calculer u_2 et u_3.
   - Conjecturer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
   - Démontrer cette conjecture par récurrence.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.
5. Soit $x \in]0;+\infty[$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.

Fiche de calcul n°14

Limites

Limites de suites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-2n^2+2)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+n+2}{1-n}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3n+\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right)$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

Rappel :

Soit f une fonction à valeurs réelles et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ $(a\in\mathbb{R})$ alors la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

Limites de fonctions

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Compléter :
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=$
   - $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=$
2. Calculer les limites suivantes et donner les éventuelles interprétations graphiques :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x-x+2)$
   - $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-\dfrac{2}{x}+3\ln x\right)$
   - $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{-3x+4}{2+x}$
   - $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+7}{4-x^2}$
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}\dfrac{x^2-3x+7}{4-x^2}$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2}{e^x+1}$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{-x}-3x^2+x+1\right)$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x-4\ln x\right)$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3x-2}{x+1}\right)$

Fiche de calcul n°15

Géométrie dans le plan : produit scalaire et applications

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé, on considère les points E(2; 3), F(−6 ; 4), G(−4 ; 20) et H(4 ; 19).
Démontrer que EFGH est un rectangle.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points A(6; 1) et B(−3 ; 3) ainsi que la droite (d) d'équation $y = 2x$.

1. Faire une figure.
2. On cherche à déterminer s'il existe des points M appartenant à la droite (d) tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires.
   (a) Conjecturer graphiquement la réponse à ce problème.
   (b) On note M$(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point M dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
      i. Si M appartient à la droite (d), quelle relation peut-on donner entre x et y ?
      ii. Exprimer, en fonction de x, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.
      iii. Calculer alors $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ en fonction de x.
      iv. Conclure.

Exercice 3 :

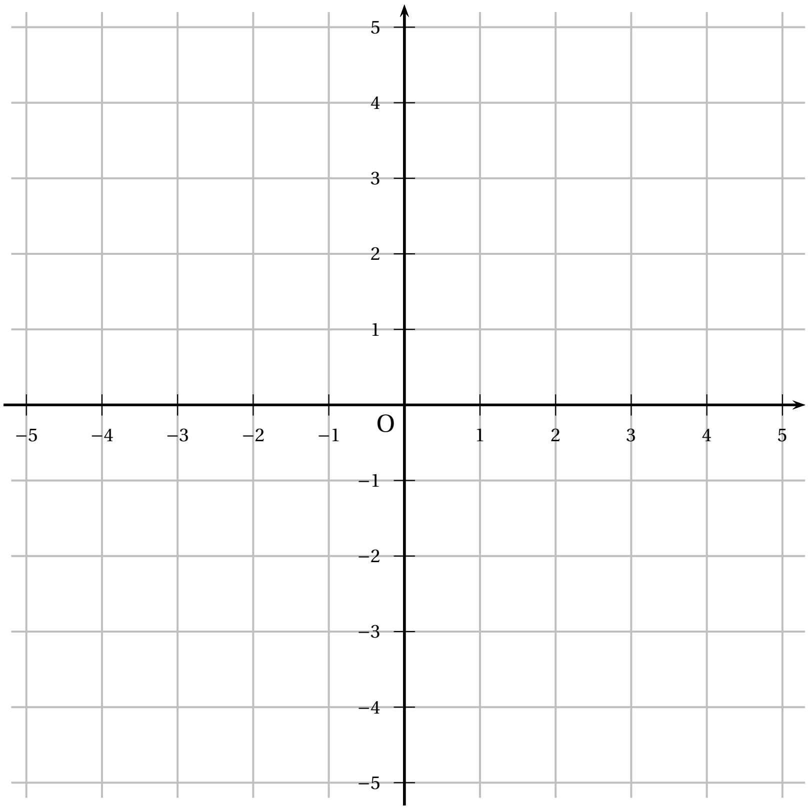
On note $\mathscr{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer le centre A et le rayon R du cercle $\mathscr{C}$.
2. Vérifier que le point B(2 ; 3) appartient à $\mathscr{C}$.
3. Notons (d) la droite d'équation cartésienne $x + y - 5 = 0$.
   Démontrer que cette droite est tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B.

Exercice 4 :

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(-3\,;\,5)$ et la droite (d) dont une équation cartésienne est : $-x+3y+2=0$.

1. Tracer la droite (d) dans le repère donné en ci-dessous.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite (d).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (d) et passant par A.
4. En déduire que le point H, projeté orthogonal de A sur la droite (d), a pour coordonnées $(-1;\ -1)$.
5. En déduire la distance entre le point A et la droite (d).



Fiche de calcul n°16

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 :

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On note (d) la droite passant par le point A$(-1\ ;\ 2\ ;\ 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\left(d'\right)$ la droite passant par le point B$(-4\ ;\ 5\ ;\ 7)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\\22\end{pmatrix}$.

Enfin, on considère le point M$(-3\ ;\ 2\ ;\ -4)$.

1. Démontrer que le point M appartient à la droite (d).
2. Le point M appartient-il à la droite $\left(d'\right)$? Justifier.
3. Déterminer la position relative des droites (d) et $\left(d'\right)$.

Exercice 2 :

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A$(2\ ;\ -1\ ;\ -3)$ et B$(-2\ ;\ 6\ ;\ 7)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Soit M le point tel que B soit le milieu de [AM].
   (a) Déterminer les coordonnées du point M.
   (b) Démontrer que le point M appartient au plan $\mathscr{P}$.
2. Soit C$(12\ ;\ -8\ ;\ -11)$.
   (a) Le point C appartient-il au plan $\mathscr{P}$? Justifier.
   (b) Déterminer la position relative de la droite (MC) et du plan $\mathscr{P}$.

Exercice 3 :

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère les points A$(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$ B$(1\ ;\ 0\ ;\ -3)$, C$(6\ ;\ 6\ ;\ 1)$ et E$(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$.

1. (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
   (c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
2. (a) Démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.
   (c) Démontrer que le point H$\left(4\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC).

Exercice 4 : Nouvelle Calédonie – Novembre 2019

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est-à-dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED].
Soit J un point du segment [CG]. La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

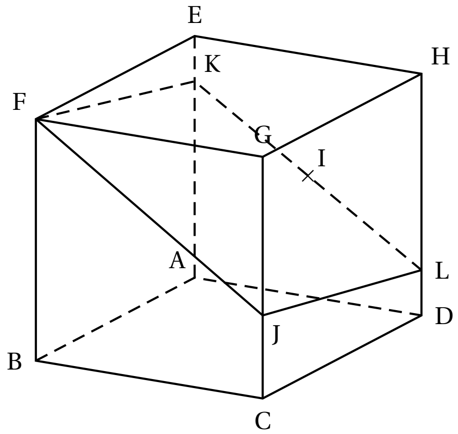


Figure 1

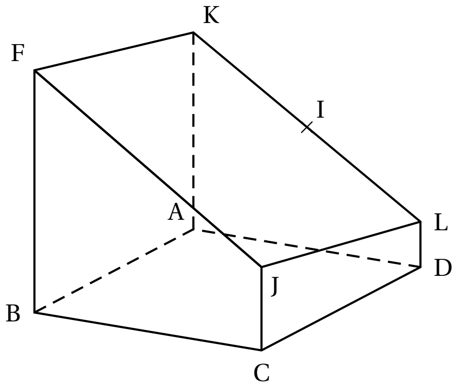


Figure 2

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On a donc A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0) , E(0 ; 0 ; 1) et F(1 ; 0 ; 1).
On suppose que le point J a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{2}{5}\right)$.

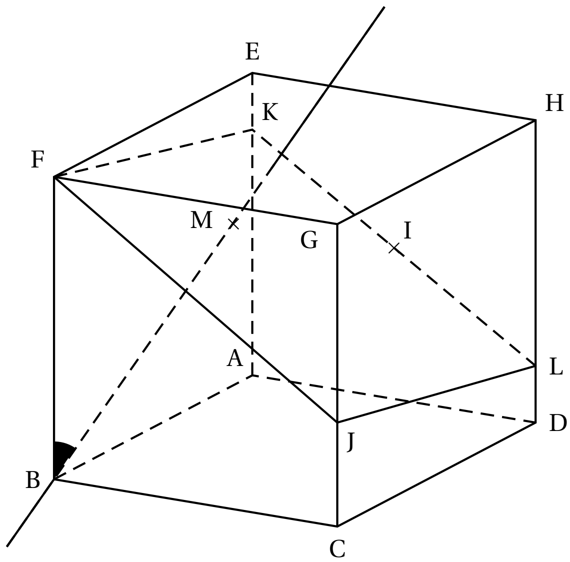
1. Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

2. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

   (b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $-x+3y+5z-4=0$.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
   (b) On note M le point d'intersection de la droite (d) et du plan (FIJ).
   Démontrer que M $\left(\frac{6}{7}\,;\,\frac{3}{7}\,;\,\frac{5}{7}\right)$.

4. (a) Calculer $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BF}$.
   (b) En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{MBF}$.

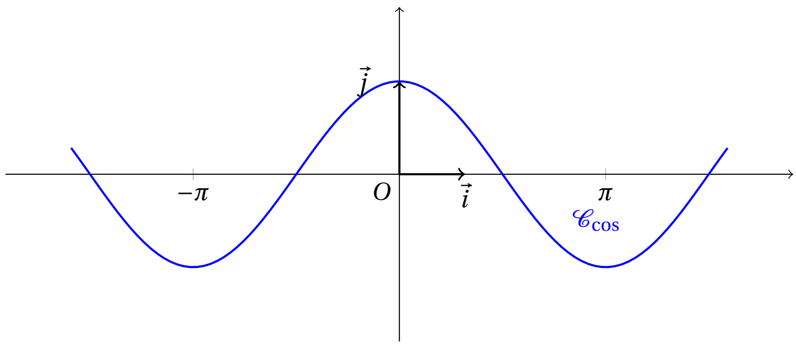


Fonction cosinus

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est paire et 2π-périodique.
  On l'étudie donc sur l'intervalle $[0;\pi]$.
- cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
  $\cos(u)$ est dérivable sur I et $(\cos u)' = -u' \sin u$.
- cos est décroissante sur $[0;\pi]$ et a pour tableau de variation sur une période :

x	$-\pi$		0		π
Variations de cos	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

- On rapporte le plan à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
  La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



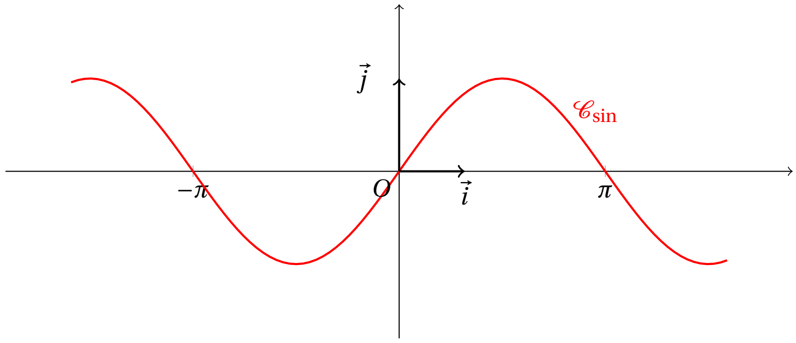
Fonction sinus

- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire et 2π-périodique.
  On l'étudie donc sur l'intervalle $[0;\pi]$.
- $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
  $\sin(u)$ est dérivable sur I et $(\sin u)' = u' \cos u$.
- $\sin$ est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

  Voici son tableau de variation :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de sin	0 ↘	-1 ↗	1 ↘	0

- On rapporte le plan à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
  La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Fonction exponentielle

— **Définition :** La fonction exponentielle, notée exp, est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ayant pour dérivée elle-même et prenant la valeur 1 en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$$

— **Continuité et dérivabilité :** La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) = e^x$$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $\exp(u) = e^u$ est dérivable sur I et $\left(e^u\right)' = u'e^u$.

— **Sens de variation :** exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— **Limites :**

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

— **Tableau de variations :**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de exp	$0 \nearrow +\infty$

— **Signe :** La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

— **Croissances comparées :** $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

— **Autre limite :** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

— **Propriétés :** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad e^{na} = (e^a)^n$$

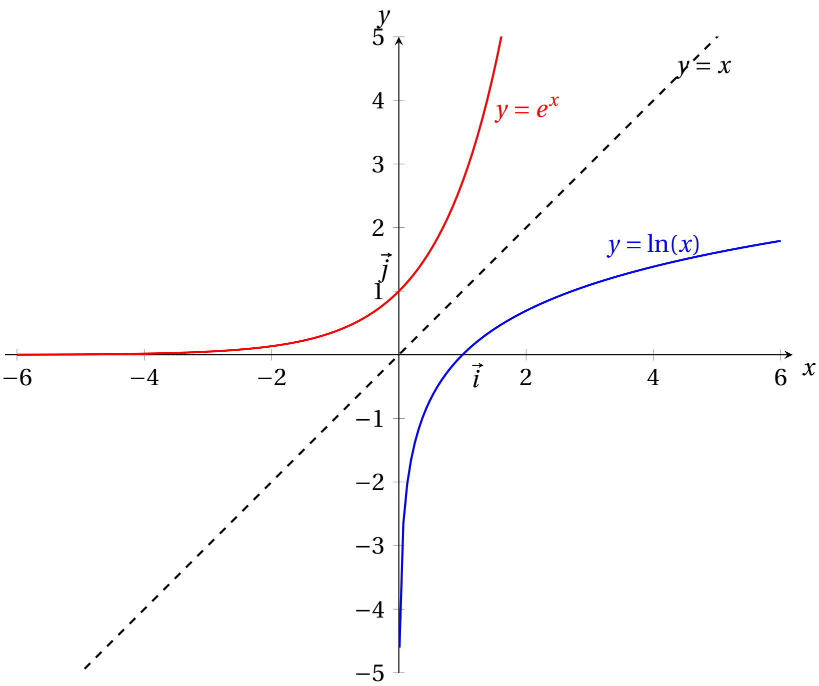
Fonction logarithme népérien

- **Définition :** La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction réciproque de la fonction exp. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$
  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \ln(x) = y \Longleftrightarrow x = e^y$
- **Continuité et dérivabilité :**
  La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Soit u une fonction strictement positive dérivable sur un intervalle I, alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.
- **Sens de variation :** ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **Limites :**
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
- **Tableau de variations :**

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de ln	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

- **Signe :** La fonction ln est négative sur $[0; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$.
- **Croissances comparées :**
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$
- **Propriétés :** Soit a et b deux réels strictement positifs.
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$$

Voici les courbes représentatives des fonctions ln et exp dans le plan muni d'un repère orthonormé.



Rappels de cours

Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

- **Définition :** Une suite (u_n) est **arithmétique** si $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé **raison de la suite** (u_n).
- **Terme général :** Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r$.
  Plus généralement, $\forall n \geq p$, $u_n = u_p + (n-p)r$.
- **Sens de variation et limite :**
  - Si $r = 0$, (u_n) est **constante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.
  - Si $r > 0$, (u_n) est **croissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
  - Si $r < 0$, (u_n) est **décroissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- **Somme des termes consécutifs :** La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 est le réel S_n tel que :
  $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
  Plus généralement, $S = \text{nombre de termes de la somme} \times \dfrac{\text{premier terme + dernier terme de la somme}}{2}$.

Suites géométriques

- **Définition :** Une suite (u_n) est **géométrique** si $\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.
  Le nombre q est appelé **raison de la suite** (u_n).
- **Terme général :** Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$.
  Plus généralement, $\forall n \geq p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- **Sens de variation de la suite (q^n) et limite :**
  - Si $q = 1$, la suite (q^n) est **constante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
  - Si $q > 1$, la suite (q^n) est **croissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
  - Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) est **décroissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
  - Si $q < 0$, la suite (q^n) n'est pas monotone :
    - Si $-1 < q < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
    - Si $q \leq -1$, (q^n) **n'a pas de limite**.
- **Somme des termes consécutifs :** La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 est le réel S_n tel que :
  Si $q \neq 1, S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$.
  Si $q = 1, S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0$.
  Plus généralement, $S = \text{premier terme de la somme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - \text{raison}}$.

Savoir-Faire

- **Étudier le sens de variation d'une suite.**
  On étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs **OU** on compare le quotient de deux termes consécutifs à 1 si la suite est **strictement positive**.
- **Étudier la nature d'une suite (suite arithmétique ou géométrique).**
  On exprime le terme suivant en fonction du précédent **OU** on calcule la différence ou le quotient de deux termes consécutifs.
- **Étudier le sens de variation (ou la limite) d'une suite géométrique.**
  On étudie la suite (q^n) et on conclut en tenant compte du signe de u_0.
- **Calculer une limite de suite.**
  Un calcul de limite se fait avec du « bon sens », mais il doit être justifié.
  S'il y a une forme indéterminée, on cherche à la lever.