Cahier de vacances mathématiques
Eléments de correction

Lycée Ozanam – Site Icam Lille

2025 - 2026

C. HÉDIN

Fiche n°1

Ensembles de nombres

1.
   - $A \in \mathbb{D}$
   - $B \in \mathbb{R}$
   - $C \in \mathbb{Z}$
   - $D \in \mathbb{N}$
   - $E \in \mathbb{D}$
   - $F \in \mathbb{Q}$
   - $G \in \mathbb{Q}$
   - $H \in \mathbb{R}$
   - $I \in \mathbb{Z}$
   - $J \in \mathbb{N}$
2. **Encadrement de $2a-b$:**

   On ne peut pas faire la différence de deux inégalités, il faut utiliser l'opposé.

   $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ alors $1 \leq 2a \leq 2$. De plus, $3 \leq b \leq 4$ donc $-4 \leq -b \leq -3$. Alors, en sommant, $\boxed{-3 \leq 2a-b \leq -1}$.

   Encadrement de $\frac{4a-1}{b+1}$:

   On ne peut pas diviser deux inégalités, il faut utiliser l'inverse.

   $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ alors $2 \leq 4a \leq 4$. D'où $1 \leq 4a-1 \leq 3$. De plus, $3 \leq b \leq 4$. Alors $0 < 4 \leq b+1 \leq 5$ d'où $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{b+1} \leq \frac{1}{4}$.
   Toutes les quantités sont positives, on peut donc multiplier membre à membre.

   Donc par produit, $\boxed{\frac{1}{5} \leq \frac{4a-1}{b+1} \leq \frac{3}{4}}$.

Fiche de calcul n°2

Fractions

1.
- $\dfrac{36}{25}\times\dfrac{15}{12}\times 5=\dfrac{4\times 9}{5\times 5}\times\dfrac{5\times 3}{4\times 3}\times 5=9$ donc $\boxed{\dfrac{36}{25}\times\dfrac{15}{12}\times 5=9}$.
- $-\dfrac{2}{15}\div\left(\dfrac{-6}{5}\right)=\dfrac{2}{15}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{2}{5\times 3}\times\dfrac{5}{2\times 3}=\dfrac{1}{9}$ donc $\boxed{-\dfrac{2}{15}\div\left(\dfrac{-6}{5}\right)=\dfrac{1}{9}}$.
- $$\begin{aligned}\frac{1978\times 1979+1980\times 21+1958}{1980\times 1979-1978\times 1979} &= \frac{1978\times 1979+1979\times 21+21+1958}{1979\times(1980-1978)}\\ &= \frac{1979\times(1978+21)+1979}{1979\times 2}\\ &= \frac{1979\times(1999+1)}{1979\times 2}\\ &= 1000\end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\dfrac{1978\times 1979+1980\times 21+1958}{1980\times 1979-1978\times 1979}=1000}$.
- $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{5}{3}}}=1+\cfrac{1}{1+\frac{3}{5}}=1+\cfrac{1}{\frac{8}{5}}=1+\dfrac{5}{8}=\dfrac{13}{8}$

  Donc $\boxed{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=\dfrac{13}{8}}$.
- $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\div\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}}\div\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{56}}=\left(\dfrac{1}{2}\times 12\right)\div\left(\dfrac{1}{30}\times 56\right)=6\times\dfrac{30}{56}=3\times 2\times\dfrac{15}{2\times 14}=\dfrac{45}{14}$

  Donc $\boxed{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\div\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}}\div\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{56}}=\dfrac{45}{14}}$.

2.
- $\dfrac{2022}{(-2022)^2-2021\times 2023}=\dfrac{2022}{2022^2-(2022-1)\times(2022+1)}=\dfrac{2022}{2022^2-(2022^2-1)}=2022$

  Donc $\boxed{\dfrac{2022}{(-2022)^2-2021\times 2023}=2022}$.
- $\dfrac{2021^2}{2020^2+2022^2-2}=\dfrac{2021^2}{(2021+1)^2+(2021-1)^2-2}=\dfrac{2021^2}{2021^2+2\times 2021+1+2021^2-2\times 2021+1-2}=\dfrac{2021^2}{2\times 2021^2}=\dfrac{1}{2}$

  Donc $\boxed{\dfrac{2021^2}{2020^2+2022^2-2}=\dfrac{1}{2}}$.

3.
$$\frac{2\times\left(-\frac{6}{11}\right)+\frac{\frac{6}{11}+3}{4}}{\frac{5}{408}\times\left(-\frac{6}{11}\right)+\frac{\frac{6}{11}+2}{544}} = \frac{-\frac{12}{11}+\frac{\frac{39}{11}}{4}}{\frac{5}{6\times 68}\times\left(-\frac{6}{11}\right)+\frac{\frac{28}{11}}{544}}$$
$$= \frac{-\frac{12}{11}+\frac{39}{44}}{-\frac{5}{11\times 68}+\frac{4\times 7}{11}\times\frac{1}{4\times 2\times 68}}$$
$$= \frac{-\frac{48}{44}+\frac{39}{44}}{-\frac{5}{11\times 68}+\frac{7}{11\times 2\times 68}}$$
$$= \frac{-\frac{9}{11\times 4}}{-\frac{10}{11\times 2\times 68}+\frac{7}{11\times 2\times 68}}$$
$$= \frac{-\frac{9}{11\times 4}}{-\frac{3}{11\times 2\times 68}}$$
$$= \frac{9}{11\times 4}\times\frac{11\times 4\times 34}{3}$$
$$= 3\times 34$$
$$= 102.$$

$\boxed{\text{Mémé a 102 ans}}$.

4.
- $A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ donc $\boxed{A = \frac{ad}{bc}}$.
- $B = \frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}} = \frac{a}{b\times\frac{d}{c}} = \frac{a}{\frac{bd}{c}} = a\times\frac{c}{bd} = \frac{ac}{bd}$ donc $\boxed{B = \frac{ac}{bd}}$.
- $C = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{d} = \frac{a\times\frac{c}{b}}{d} = \frac{\frac{ac}{b}}{d} = \frac{ac}{bd}$ donc $\boxed{C = \frac{ac}{bd}}$.
- $D = \frac{\frac{\frac{a}{b}}{c}}{d} = \frac{\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}}{d} = \frac{\frac{a}{bc}}{d} = \frac{a}{bcd}$ donc $\boxed{D = \frac{a}{bcd}}$.

5.
- $\frac{k}{k-1} = \frac{k-1+1}{k-1} = 1+\frac{1}{k-1}$ donc $\boxed{\frac{k}{k-1} = 1+\frac{1}{k-1}}$.
- $\frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = 3+\frac{5}{x-2}$ donc $\boxed{\frac{3x-1}{x-2} = 3+\frac{5}{x-2}}$.

1. - Soit $n\in\mathbb{N}^*, A(n)=\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n}{n(n+1)^2}+\dfrac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\dfrac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\dfrac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2}=-\dfrac{1}{n(n+1)^2}$.

   Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, A(n)=-\dfrac{1}{n(n+1)^2}}$.

   - Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}, B(n)=\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2(n-1))}\times\dfrac{n^2(n-1)^2}{2(n+1)}=\dfrac{3n}{2}$.

   Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}, B(n)=\dfrac{3n}{2}}$.

   - Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}, C(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{2+2x}{x^2-1}=\dfrac{2}{x-1}$.

   Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}, C(x)=\dfrac{2}{x-1}}$.

   - Soit $x\in\mathbb{R}^*, D(x)=\dfrac{x-2}{2x}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{3-x}{3x}=\dfrac{3(x-2)}{6x}-\dfrac{x}{6x}+\dfrac{2(3-x)}{6x}=0$.

   Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*, D(x)=0}$.

   - Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}, E(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-2x}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}+\dfrac{x(x+2)}{x(x-2)(x+2)}+\dfrac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)}$

   $E(x)=\dfrac{x^2-4+x^2+2x+2x+4}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{2x(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{2}{x-2}$.

   Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}, E(x)=\dfrac{2}{x-2}}$.

   - Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}, F(x)=\dfrac{\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}}}=\dfrac{\dfrac{1}{\frac{x+1}{x}}}{\dfrac{1}{\frac{-x}{1-x}}}=\dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1-x}{-x}}=-\dfrac{x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

   Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}, F(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}}$.

2. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de cette équation.

   Soit $x\in\mathbb{R}, x\in\mathscr{D}\iff\left\{\begin{array}{ccccc}3x&+&1&\neq&0\\x&+&2&\neq&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccc}x&\neq&-\frac{1}{3}\\x&\neq&-2\end{array}\right.$. Alors $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3};-2\right\}$.

   Soit $x\in\mathscr{D}$,

   $\dfrac{3x+2}{3x+1}=\dfrac{x-1}{x+2}\iff(3x+2)(x+2)=(3x+1)(x-1)\iff 3x^2+6x+2x+4=3x^2-3x+x-1\iff 10x=-5\iff x=-\dfrac{1}{2}$.

   $-\dfrac{1}{2}\in\mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}}$.

3. • On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation.

Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{D} \iff 2x+1 \neq 0 \iff x \neq -\frac{1}{2}$. Alors $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

On dresse un tableau de signes pour résoudre cette inéquation :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
Signe de $x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du quotient		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]4;+\infty\right[}$.

- On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D} \iff 2-x \neq 0 \iff x \neq 2$. Alors $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
  Soit $x \in \mathscr{D}$, $\dfrac{x-3}{2-x} \leq 2 \iff \dfrac{x-3-2(2-x)}{2-x} \leq 0 \iff \dfrac{3x-7}{2-x} \leq 0$
  On dresse un tableau de signes pour résoudre cette inéquation :

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2-x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du quotient		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

  Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty;2\right[\cup \left[\frac{7}{3};+\infty\right[}$.

- $\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}$
- $\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}$
- $\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}$

Fiche de calcul n°3

Puissances

1.
   - $\dfrac{(10^5\times 10^{-3})^5}{(10^{-5}\times 10^3)^{-3}} = \dfrac{(10^2)^5}{(10^{-2})^{-3}} = \dfrac{10^{10}}{10^6} = 10^4$ donc $\boxed{\dfrac{(10^5\times 10^{-3})^5}{(10^{-5}\times 10^3)^{-3}} = 10^4}$.
   - $\dfrac{30^{28}}{2^{28}\times 5^{28}} = \dfrac{30^{28}}{10^{28}} = \left(\dfrac{30}{10}\right)^{28} = 3^{28}$ donc $\boxed{\dfrac{30^{28}}{2^{28}\times 5^{28}} = 3^{28}}$.
2.
   - $\dfrac{2^3\times 3^2}{3^4\times 2^8\times 6^{-1}} = \dfrac{2^3\times 3^2}{3^4\times 2^8\times 2^{-1}\times 3^{-1}} = 2^{3-8+1}\times 3^{2-4+1} = 2^{-4}\times 3^{-1}$ donc $\boxed{\dfrac{2^3\times 3^2}{3^4\times 2^8\times 6^{-1}} = 2^{-4}\times 3^{-1}}$.
   - $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{3^{21}(3+1)}{3^{21}(3-1)} = 2$ donc $\boxed{\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = 2}$.
3.
   - $\dfrac{8^3}{4^2} = \dfrac{4^3\times 2^3}{4^2} = 4\times 2^3 = 2^2\times 2^3 = 2^5$ donc $\boxed{\dfrac{8^3}{4^2} = 2^5}$.
   - $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{(3^3)^{-1}\times (2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{3^{-3}\times 2^4}{3^{-4}\times 2^4} = 3^{-3+4} = 3$ donc $\boxed{\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4} = 3}$.
   - $\dfrac{8^{17}\times 6^{-6}}{9^{-3}\times 2^{42}} = \dfrac{(2^3)^{17}\times 2^{-6}\times 3^{-6}}{(3^2)^{-3}\times 2^{42}} = \dfrac{2^{51}\times 2^{-6}\times 3^{-6}}{3^{-6}\times 2^{42}} = 2^{51-6-42} = 2^3$ donc $\boxed{\dfrac{8^{17}\times 6^{-6}}{9^{-3}\times 2^{42}} = 2^3}$.
   - $\dfrac{5^{10}\times 7^3 - 25^5\times 49^2}{(125\times 7)^3 + 5^9\times 14^3} = \dfrac{5^{10}\times 7^3 - (5^2)^5\times (7^2)^2}{(5^3\times 7)^3 + 5^9\times 7^3\times 2^3} = \dfrac{5^{10}\times 7^3 - 5^{10}\times 7^4}{5^9\times 7^3 + 5^9\times 7^3\times 2^3} = \dfrac{5^{10}\times 7^3(1-7)}{5^9\times 7^3(1+2^3)} = \dfrac{5\times(-6)}{9} = -\dfrac{10}{3}$

     donc $\boxed{\dfrac{5^{10}\times 7^3 - 25^5\times 49^2}{(125\times 7)^3 + 5^9\times 14^3} = -\dfrac{10}{3}}$.
   - $\dfrac{55^2\times 121^{-2}\times 125^2}{275\times 605^{-2}\times 25^4} = \dfrac{(5\times 11)^2\times (11^2)^{-2}\times (5^3)^2}{5^2\times 11\times (11^2\times 5)^{-2}\times (5^2)^4} = \dfrac{5^2\times 11^2\times 11^{-4}\times 5^6}{5^2\times 11\times 11^{-4}\times 5^{-2}\times 5^8} = 11$ donc $\boxed{\dfrac{55^2\times 121^{-2}\times 125^2}{275\times 605^{-2}\times 25^4} = 11}$.
   - $\dfrac{12^{-2}\times 15^4}{25^2\times 18^{-4}} = \dfrac{(3\times 2^2)^{-2}\times (5\times 3)^4}{(5^2)^2\times (2\times 3^2)^{-4}} = \dfrac{3^{-2}\times 2^{-4}\times 5^4\times 3^4}{5^4\times 2^{-4}\times 3^{-8}} = 3^{10}$ donc $\boxed{\dfrac{12^{-2}\times 15^4}{25^2\times 18^{-4}} = 3^{10}}$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$.
   - $a_n = \dfrac{1}{(-1)^n} = (-1)^{-n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

     donc $\boxed{a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$.
   - $b_n = (-1)^{n+2} = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

     donc $\boxed{b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$.
   - $c_n = (-1)^{2n} = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1$ donc $\boxed{c_n = 1}$.
   - $d_n = (-1)^{4n+1} = (-1)^{4n}\times(-1) = -1$ donc $\boxed{d_n = -1}$.
5. Soit $a\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ tel que $a^5 = 1$.
   - $A = a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1 = a^5\times a^2 - 3(a^5\times a) + 4\times 1 - a^2 + 3a - 1 = a^2 - 3a + 4 - a^2 + 3a - 1 = 3$ donc $\boxed{A = 3}$.
   - $B = a^{1234}\times a^{2341}\times a^{3412}\times a^{4123} = a^{1234+2341+3412+4123} = a^{11110} = a^{2222\times 5} = (a^5)^{2222} = 1^{2222} = 1$ donc $\boxed{B = 1}$.
   - $C = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = \dfrac{1-a^5}{1-a} = 0$ donc $\boxed{C = 0}$.

Fiche de calcul n°4

Calcul littéral

Développer/Factoriser

1. Soit x un réel.
   - $A(x)=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-4)=(-3x+2)(x-4)=-3x^2+12x+2x-8=-3x^2+14x-8$ donc $\boxed{A(x)=-3x^2+14x-8}$.
   - $\boxed{\text{Rappel : } \forall (a,b)\in\mathbb{R}^3, (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.}$

     $B(x)=(2x-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$ donc $\boxed{B(x)=8x^3-12x^2+6x-1}$.
   - $C(x)=(x^2+x+1)^2=x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2=x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ donc $\boxed{C(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$.
   - $D(x)=(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)=10x^2-16x+15x-24-(10x^2-2x-20x+4)=10x^2-x-24-10x^2+22x-4$ donc $\boxed{D(x)=21x-28}$.
2. Soit i un nombre tel que $i^2=-1$.
   - $(3+i)^2=9+6i+i^2=9+6i-1=8+6i$ donc $\boxed{(3+i)^2=8+6i}$.
   - $(3-2i)^3=27-54i+36i^2-8i^3=27-54i-36+8i=-9-46i$ donc $\boxed{(3-2i)^3=-9-46i}$.
   - $(4-5i)(6+3i)=24+12i-30i-15i^2=24-18i+15=39-18i$ donc $\boxed{(4-5i)(6+3i)=39-18i}$.
3. Soit x un réel.
   - $A(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ donc $\boxed{A(x)=3x(x-2)}$.
   - $B(x)=(3x+2)(x-1)+(5x-3)(5x-5)=(3x+2)(x-1)+5(5x-3)(x-1)=(x-1)[3x+2+5(5x-3)]$

     $B(x)=(x-1)(3x+2+25x-15)=(x-1)(28x-13)$ donc $\boxed{B(x)=(x-1)[3x+2+5(5x-3)]}$.
   - $C(x)=(2x-3)(2x-4)-(2-x)(4x-2)=2(2x-3)(x-2)-2(2-x)(2x-1)=2(x-2)(2x-3+2x-1)$

     $C(x)=2(x-2)(4x-4)=8(x-2)(x-1)$ donc $\boxed{C(x)=8(x-2)(x-1)}$.
   - $D(x)=8x+4-(x-5)(2x+1)=4(2x+1)-(x-5)(2x+1)=(2x+1)[4-(x-5)]=(2x+1)(4-x+5)=(2x+1)(-x+9)$ donc $\boxed{D(x)=(2x+1)(-x+9)}$.
   - $E(x)=(12x-4)(x+2)-7x(3x-1)+(9x-3)(x-1)=4(3x-1)(x+2)-7x(3x-1)+3(3x-1)(x-1)$

     $E(x)=(3x-1)[4(x+2)-7x+3(x-1)]=(3x-1)(4x+8-7x+3x-3)=(3x-1)(-3x+5)$

     donc $\boxed{E(x)=(3x-1)(-3x+5)}$.
   - $F(x)=9x^2+49-42x=(3x-7)^2$ donc $\boxed{F(x)=(3x-7)^2}$.
   - $G(x)=(2x+1)^2-49=(2x+1+7)(2x+1-7)=(2x+8)(2x-6)=4(x+4)(x-3)$ donc $\boxed{G(x)=4(x+4)(x-3)}$.
   - $H(x)=-(3x+5)^2+(1-x)^2=(1-x+3x+5)[1-x-(3x+5)]=(2x+6)(-4x-4)=-8(x+3)(x+1)$ donc $\boxed{H(x)=-8(x+3)(x+1)}$.
   - $I(x)=(x+2)(3x-6)+5(4-2x)^2=3(x+2)(x-2)+20(2-x)^2=3(x+2)(x-2)+20(x-2)^2$

     $I(x)=(x-2)[3(x+2)+20(x-2)]=(x-2)(3x+6+20x-40)=(x-2)(23x-34)$ donc $\boxed{I(x)=(x-2)(23x-34)}$.
   - $J(x)=3x^2-x+(x+1)(3x-1)=x(3x-1)+(x+1)(3x-1)=(3x-1)(x+x+1)=(3x-1)(2x+1)$ donc $\boxed{J(x)=(3x-1)(2x+1)}$.
   - $K(x)=(3x+5)^2-3x-5=(3x+5)(3x+5-1)=(3x+5)(3x+4)$ donc $\boxed{K(x)=(3x+5)(3x+4)}$.
   - $L(x)=9(x-1)^2-(2x+3)^2=(3(x-1))^2-(2x+3)^2=[3(x-1)+2x+3][3(x-1)-(2x+3)]$

     $L(x)=(3x-3+2x+3)(3x-3-2x-3)=5x(x-6)$ donc $\boxed{L(x)=5x(x-6)}$.
   - $M(x)=-49x^2+1=(1-7x)(1+7x)$ donc $\boxed{M(x)=(1-7x)(1+7x)}$.
   - $N(x)=(5x-3)(x+1)-(x+1)^2+x^2-1=(5x-3)(x+1)-(x+1)^2+(x-1)(x+1)$

     $N(x)=(x+1)[5x-3-(x+1)+x-1]=(x+1)(5x-5)=5(x+1)(x-1)$ donc $\boxed{N(x)=5(x+1)(x-1)}$.
   - $O(x)=2x(4-x)-4+x=2x(4-x)-(4-x)=(4-x)(2x-1)$ donc $\boxed{O(x)=(4-x)(2x-1)}$.
   - $P(x)=x^2+6x+9-(x+3)(x-1)=(x+3)^2-(x+3)(x-1)=(x+3)[x+3-(x-1)]=4(x+3)$ donc $\boxed{P(x)=4(x+3)}$.

- $Q(x) = x^2 + 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ donc $\boxed{Q(x) = (x-2)(x-1)}$.
- $R(x) = -5x^2 + 6x - 1 = -5(x-1)\left(x - \dfrac{1}{5}\right) = (x-1)(-5x+1)$ donc $\boxed{R(x) = (x-1)(-5x+1)}$.
- $S(x) = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ donc $\boxed{S(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)}$.

Fiche de calcul n°5

Valeur absolue

1.
- $|-2| = 2$
- $|\pi - 3| = \pi - 3$
- $|\pi - 4| = 4 - \pi$
- $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

2. Le tableau complété :

$x \in [\cdots;\cdots]$	$\cdots \leq x \leq \cdots$	x appartient à l'intervalle fermé de centre $\cdots$ et de rayon $\cdots$	$\lvert x - \cdots \rvert \leq \cdots$
$x \in [-1;2]$	$-1 \leq x \leq 2$	Centre : $0,5$ et rayon : $1,5$	$\lvert x - 0,5 \rvert \leq 1,5$
$x \in [2;4]$	$2 \leq x \leq 4$	Centre : 3 et rayon : 1	$\lvert x - 3 \rvert \leq 1$
$x \in [0;3]$	$0 \leq x \leq 3$	Centre : $\frac{3}{2}$ et rayon : $\frac{3}{2}$	$\left\lvert x - \frac{3}{2} \right\rvert \leq \frac{3}{2}$
$x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$	$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$	Centre : 1 et rayon : $\frac{5}{2}$	$\lvert x - 1 \rvert \leq \frac{5}{2}$
$x \in \left[-\frac{5}{4};3\right]$	$-\frac{5}{4} \leq x \leq 3$	Centre : $\frac{7}{8}$ et rayon : $\frac{17}{8}$	$\left\lvert x - \frac{7}{8} \right\rvert \leq \frac{17}{8}$

3.
- $\boxed{\textit{Rappel :}\ \forall X \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |X| = a \Longleftrightarrow X = a \text{ ou } X = -a}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x - 8| = 1 \Longleftrightarrow x - 8 = 1$ ou $x - 8 = -1 \Longleftrightarrow x = 9$ ou $x = 7$.
Donc $\boxed{S = \{7;9\}}$.
- $\boxed{\textit{Rappel :}\ \forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, |X| = |Y| \Longleftrightarrow X = Y \text{ ou } X = -Y \Longleftrightarrow X^2 = Y^2}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $|1 - 2x| = |x + 3| \Longleftrightarrow 1 - 2x = x + 3$ ou $1 - 2x = -x - 3 \Longleftrightarrow 3x = -2$ ou $x = 4 \Longleftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 4$.
Donc $\boxed{S = \left\{-\frac{2}{3};4\right\}}$.
- $\boxed{\textit{Rappel :}\ \forall X \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |X| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq X \leq a}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $|2 - x| < 3 \Longleftrightarrow -3 < 2 - x < 3 \Longleftrightarrow -5 < -x < 1 \Longleftrightarrow -1 < x < 5$
Donc $\boxed{S =]-1,5[}$.
- $\boxed{\textit{Rappel :}\ \forall X \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |X| \geq a \Longleftrightarrow X \leq -a \text{ ou } X \geq a}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $|3x + 4| \geq 5 \Longleftrightarrow 3x + 4 \leq -5$ ou $3x + 4 \geq 5 \Longleftrightarrow 3x \leq -9$ ou $3x \geq 1 \Longleftrightarrow x \leq -3$ ou $x \geq \frac{1}{3}$.
$\boxed{S =]-\infty;-3] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right[}$.
- *Ici, l'inéquation est formée de la comparaison de deux valeurs absolues, le réflexe est d'élever au carré.*
Soit $x \in \mathbb{R}$, $|2x - 3| \leq |x - 1| \Longleftrightarrow (2x - 3)^2 \leq (x - 1)^2 \Longleftrightarrow (2x - 3)^2 - (x - 1)^2 \leq 0 \Longleftrightarrow (3x - 4)(x - 2) \leq 0$.
On effectue alors un tableau de signes et on obtient $\boxed{S = \left[\frac{4}{3};2\right]}$.

- On écrit $2|x+1|+|5-x|$ sans valeur absolue à l'aide d'un tableau.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  * On détermine les valeurs de x pour lesquelles les expressions mises en valeur absolue changent de signe.
    - $x+1=0 \Longleftrightarrow x=-1$
    - $5-x=0 \Longleftrightarrow x=5$
  * On dresse le tableau :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$\lvert 5-x\rvert$		$5-x$		$5-x$	0	$x-5$	
$2\lvert x+1\rvert+\lvert 5-x\rvert$		$-3x+3$		$x+7$		$3x-3$	

Il n'y a pas de zéro sur la dernière ligne. En effet, on fait une somme, pas un produit !

* On résout alors 3 équations :
  - Si $x \in]-\infty;-1], 2|x+1|+|5-x|=8 \Longleftrightarrow -3x+3=8 \Longleftrightarrow -3x=5 \Longleftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$.
    Or $-\dfrac{5}{3} \in]-\infty;-1]$, donc $S_1=\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$.
  - Si $x \in [-1;5], 2|x+1|+|5-x|=8 \Longleftrightarrow x+7=8 \Longleftrightarrow x=1$.
    Or $1 \in [-1;5]$, donc $S_2=\{1\}$.
  - Si $x \in [5;+\infty[, 2|x+1|+|5-x|=8 \Longleftrightarrow 3x-3=8 \Longleftrightarrow 3x=11 \Longleftrightarrow x=\dfrac{11}{3}$.
    Or $\dfrac{11}{3} \notin [5;+\infty[$, donc $S_3=\emptyset$.
* On détermine l'ensemble des solutions de l'équation : $S=S_1 \cup S_2 \cup S_3$ donc $\boxed{S=\left\{-\dfrac{5}{3};1\right\}}$.

Fiche de calcul n°6

Racines carrées

1.
- $\boxed{\sqrt{(-3)^2}=3}$
- $\boxed{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=2-\sqrt{3}}$
- $\boxed{\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=\sqrt{7}-2}$
- $(\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6})=\sqrt{6}^2-3^2=6-9=-3$ donc $\boxed{(\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6})=-3}$.
- $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=4-4\sqrt{5}+5=9-4\sqrt{5}$ donc $\boxed{\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}}$.
- $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{1^2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}$ donc $\boxed{\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=1+\sqrt{3}}$.
- $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4=\left(\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^2\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=2^2\times\sqrt{3}^2=12$ donc $\boxed{\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4=12}$.
- $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3+2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+3=10$ donc $\boxed{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=10}$.
- $\sqrt{25+36+64}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ donc $\boxed{\sqrt{25+36+64}=5\sqrt{5}}$.
- $\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{45}=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ donc $\boxed{\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{45}=2\sqrt{5}}$.
- $3\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{48}=6\sqrt{3}+6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ donc $\boxed{3\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{48}=8\sqrt{3}}$.
- $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\dfrac{7+2\sqrt{7}\sqrt{5}+5+7-2\sqrt{7}\sqrt{5}+5}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}=\dfrac{24}{2}=12$

  donc $\boxed{\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=12}$.

2. *Pour comparer deux nombres positifs, on compare leurs carrés et on utilise le sens de variation de la fonction racine carré sur* $[0;+\infty[$.
   $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ et $(\sqrt{3})^2=3$ donc $(1+\sqrt{2})^2>(\sqrt{3})^2$.
   Or la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $\boxed{1+\sqrt{2}>\sqrt{3}}$.

3.
- Soit $x\in[0;+\infty[$, $A(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

  Donc $\boxed{\forall x\in[0;+\infty[,\ A(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$.
- Soit $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[, B(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}$.

  Donc $\boxed{\forall x\in[0;1[\cup]1;+\infty[,\ B(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}}$.
- Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, $C(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)|1-x^2|}$.

  Or $|1-x^2|=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } 1-x^2\geq 0\\ x^2-1 & \text{si } x^2-1<0\end{cases}$, donc $|1-x^2|=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } -1\leq x\leq 1\\ x^2-1 & \text{si } x<-1 \text{ ou } x>1\end{cases}$.

  Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, C(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } -1\leq x\leq 1\\ -\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x<-1 \text{ ou } x>1\end{cases}}$.

Fiche de calcul n°7

Equations du second degré

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0 \iff x - 3 = 0 \iff x = 3$. Donc $\boxed{S = \{3\}}$.
   - $9x^2 + 6x + 1 = 0 \iff (3x+1)^2 = 0 \iff 3x + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{3}$. Donc $\boxed{S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}}$.
   - $x^2 + 4x - 12 = 0$: $\Delta = 4^2 - 4 \times (-12) = 16 + 48 = 64$. Donc l'équation admet deux solutions réelles dont la somme est égale à -4 et le produit est égal à -12. Alors $\boxed{S = \{-6; 2\}}$.
   - $x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$. Donc $\boxed{S = \{0; 5\}}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3 > 0$ donc l'équation $2x^2 + 3 = 0$ n'a pas de solution réelle. Ainsi $\boxed{S = \emptyset}$.
   - $2x^2 - x - 6 = 0$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49$. Donc l'équation admet deux solutions réelles dont la somme est égale à $\dfrac{1}{2}$ et le produit est égal à -3. Alors $\boxed{S = \left\{-\dfrac{3}{2}; 2\right\}}$.
2. - $9 + 13 = 22$ et $9 \times 13 = 117$
     donc $\boxed{\text{une équation du second degré admettant comme solutions les réels 9 et 13 est : } x^2 - 22x + 117 = 0}$.
   - $-11 + 17 = 6$ et $-11 \times 17 = -187$
     donc $\boxed{\text{une équation du second degré admettant comme solutions les réels } -11 \text{ et } 17 \text{ est : } x^2 - 6x - 187 = 0}$.
   - $2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$ et $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$
     donc $\boxed{\text{une équation du second degré admettant comme solutions les réels } 2+\sqrt{3} \text{ et } 2-\sqrt{3} \text{ est : } x^2 - 4x + 1 = 0}$.
3. - $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$: $\Delta = [-2(m-1)]^2 - 16(m+2) = 4m^2 - 8m + 4 - 16m - 32 = 4m^2 - 24m - 28 = 4(m^2 - 6m - 7)$.
     L'équation $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ admet une solution double si et seulement si son discriminant est nul.
     Or $\Delta = 0 \iff m^2 - 6m - 7 = 0 \iff m = -1$ ou $m = 7$.
     $\boxed{\text{Dans le cas où } m = -1,\ S = \{-2\} \text{ et dans le cas où } m = 7,\ S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$.
   - $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m + 3 = 0$: $\Delta = [2(3m+1)]^2 - 4(m+3)^2 = 4[(3m+1)^2 - (m+3)^2] = 4(3m+1+m+3)(3m+1-m-3) = 4(4m+4)(2m-2) = 32(m+1)(m-1)$.
     L'équation $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m + 3 = 0$ admet une solution double si et seulement si son discriminant est nul.
     Or $\Delta = 0 \iff (m+1)(m-1) = \text{ř} \iff m = -1$ ou $m = 1$.
     $\boxed{\text{Dans le cas où } m = -1,\ S = \{1\} \text{ et dans le cas où } m = 1,\ S = \{-1\}}$.
4. - Le discriminant du trinôme $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ est $\Delta = (\sqrt{2}+1)^2 - 4 \times \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 4\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$
     Or $3 - 2\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2}$ donc $\Delta = (1-\sqrt{2})^2$. Ainsi $\Delta > 0$ donc $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ admet pour racines 1 et $\sqrt{2}$.
     Lorsque son discriminant est strictement positif, le trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.
     Donc $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} \leq 0 \iff x \in \left[1; \sqrt{2}\right]$.D'où $\boxed{S = \left[1; \sqrt{2}\right]}$.
   - Le discriminant du trinôme $-x^2 + 2x + 15$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 4 + 60 = 64$.
     $-x^2 + 2x + 15$ admet deux racines réelles dont la somme est égale à 2 et le produit est égal à -15 : ces racines sont donc 5 et -3.
     Donc $-x^2 + 2x + 15 > 0 \iff x \in]-3; 5[$. D'où $\boxed{S =]-3; 5[}$.

Fiche de calcul n°8

Exponentielle et logarithme

1. - $\ln 16 = \ln 2^4 = 4\ln 2$ donc $\boxed{\ln 16 = 4\ln 2}$.
   - $\ln 512 = \ln 2^9 = 9\ln 2$ donc $\boxed{\ln 512 = 9\ln 2}$.
   - $\ln(0,125) = \ln\left(\dfrac{5^3}{10^3}\right) = \ln 5^3 - \ln 10^3 = 3\ln 5 - 3\ln(5\times 2) = 3\ln 5 - 3\ln 5 - 3\ln 2 = -3\ln 2$ donc $\boxed{\ln(0,125) = -3\ln 2}$.
   - $3\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\ln\sqrt{2} = -3\ln 2^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{3}{2}\ln 2$ donc $\boxed{3\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{3}{2}\ln 2}$.
   - $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right) = -\dfrac{1}{8}\ln 2^2 + \dfrac{1}{4}\ln 2^3 = -\dfrac{1}{4}\ln 2 + \dfrac{3}{4}\ln 2 = \dfrac{1}{2}\ln 2$ donc $\boxed{\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\ln 2}$.
   - $\ln\left(\dfrac{16}{25}\right) = \ln\left(\dfrac{2^4}{5^2}\right) = \ln 2^4 - \ln 5^2 = 4\ln 2 - 2\ln 5$ donc $\boxed{\ln\left(\dfrac{16}{25}\right) = 4\ln 2 - 2\ln 5}$.
   - $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right) = -\ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \cdots + \ln 98 - \ln 99 + \ln 99 - \ln 100 = -\ln 100 = -\ln(5\times 2)^2 = -2\ln(5\times 2) = -2\ln 5 - 2\ln 2$ donc $\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right) = -2\ln 5 - 2\ln 2}$.
2. $A = \ln((2+\sqrt{3})^{20}) + \ln((2-\sqrt{3})^{20}) = \ln\left[(2+\sqrt{3})^{20}(2-\sqrt{3})^{20}\right] = \ln\left[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right]^{20} = \ln(2^2 - \sqrt{3}^2)^{20} = \ln 1^{20} = \ln 1 = 0$ donc $\boxed{A = 0}$.
3. $B = \ln 8 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 16 = \ln 2^3 - \ln 2 + \ln 2^2 - \ln 2^4 = 3\ln 2 - \ln 2 + 2\ln 2 - 4\ln 2 = 0$.
   Donc $\boxed{B \in \mathbb{N}}$.
4. $C = \ln(\sqrt{5}-1) + \ln(\sqrt{5}+1) = \ln\left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\right] = \ln(\sqrt{5}^2 - 1^2) = \ln 4 = 2\ln 2$.
   En posant $a = b = 2$, $\boxed{\text{il existe } a \text{ et } b \text{ deux entiers naturels non nuls tels que } C = a\ln b}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{-x}) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x}\right) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x) = \ln(1+e^x) - x$.
   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+e^x) - x}$.
6. - On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de cette équation.
     Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D} \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 3 & > & 0 \\ 2x & + & 1 & > & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & > & 3 \\ x & > & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff x > 3$. Alors $\mathscr{D} =]3;+\infty[$.
     Soit $x \in \mathscr{D}$, $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 2\ln 2 \iff \ln[(x-3)(2x+1)] = \ln 4 \iff (x-3)(2x+1) = 4 \iff 2x^2 - 5x - 7 = 0 \iff x = -1$ ou $x = \dfrac{7}{2}$.
     Or $-1 \notin \mathscr{D}$ donc $\boxed{S = \left\{\dfrac{7}{2}\right\}}$.
   - On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation.
     Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D} \iff x+1 > 0 \iff x > -1$. Alors $\mathscr{D} =]-1;+\infty[$.
     Soit $x \in \mathscr{D}$, $\ln(x+1) > 0 \iff x+1 > 1 \iff x > 0$.

x	-1		0		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\ln(x+1)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S =]-1;0[\cup]2;+\infty[}$.

1.
   - $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = 8$ donc $\boxed{e^{3\ln 2} = 8}$.
   - $e^{-2\ln 3} = e^{\ln\left(\frac{1}{3^2}\right)} = \dfrac{1}{9}$ donc $\boxed{e^{-2\ln 3} = \dfrac{1}{9}}$.
   - $\ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln e = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}}$.
   - $e^{\ln 3 - \ln 2} = e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{3}{2}$ donc $\boxed{e^{\ln 3-\ln 2} = \dfrac{3}{2}}$.
   - $e^{-\ln(\ln 2)} = e^{\ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right)} = \dfrac{1}{\ln 2}$ donc $\boxed{e^{-\ln(\ln 2)} = \dfrac{1}{\ln 2}}$.
   - $\ln\left(\sqrt{e^4}\right) - \ln\left(\sqrt{e^2}\right) = \ln(e^4)^{\frac{1}{2}} - \ln(e^2)^{\frac{1}{2}} = \ln e^2 - \ln e = 2\ln e - 1 = 2-1 = 1$ donc $\boxed{\ln\left(\sqrt{e^4}\right) - \ln\left(\sqrt{e^2}\right) = 1}$.
   - $\ln\left(\sqrt{e^{-\ln e^2}}\right) = \ln(e^{-\ln e^2})^{\frac{1}{2}} = \ln\left(e^{-\frac{1}{2}\ln e^2}\right) = \ln(e^{-\ln e}) = \ln(e^{-1}) = -\ln e = -1$ donc $\boxed{\ln\left(\sqrt{e^{-\ln e^2}}\right) = -1}$.
2.
   - On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de A.
     Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow 1-x > 0 \Longleftrightarrow x < 1$ donc $\boxed{\mathscr{D} =]-\infty;1[}$.
     Soit $x \in]-\infty;1[, A(x) = e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
     Donc $\boxed{\forall x \in]-\infty;1[, A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}$.
   - On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de B.
     Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow x+1 > 0 \Longleftrightarrow x > -1$ donc $\boxed{\mathscr{D} =]-1;+\infty[}$.
     Soit $x \in]-1;+\infty[, B(x) = e^x \times e^{-\ln(x+1)} = e^x \times e^{\ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)} = \dfrac{e^x}{x+1}$.
     Donc $\boxed{\forall x \in]-1;+\infty[, B(x) = \dfrac{e^x}{x+1}}$.
3.
   - Soit $x \in \mathbb{R}, e^{-x^2+x} = 1 \Longleftrightarrow -x^2+x = \ln 1 \Longleftrightarrow -x^2+x = 0 \Longleftrightarrow -x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Donc $\boxed{S = \{0;1\}}$.

- On note $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation.
  Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{D} \iff e^x - 2 > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$. Alors $\mathscr{D} =]\ln 2; +\infty[$.
  Soit $x \in \mathscr{D}, \ln(e^x - 2) \geq 0 \iff e^x - 2 \geq 1 \iff e^x \geq 3 \iff x \geq \ln 3$. Donc $\boxed{S = [\ln 3; +\infty[}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}, e^{3x-5} > 12 \iff 3x - 5 > \ln 12 \iff 3x > \ln 12 + 5 \iff x > \dfrac{\ln 12 + 5}{3}$.
  Ainsi $\boxed{S = \left]\dfrac{\ln 12 + 5}{3} + \infty\right[}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*, e^{1+\ln x} \leq 2 \iff 1 + \ln x \leq \ln 2 \iff \ln x \leq \ln 2 - 1 \iff x \leq e^{\ln 2 - 1} \iff x \leq \dfrac{2}{e}$. Donc $\boxed{S = \left]0; \dfrac{2}{e}\right]}$.
- Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}, \dfrac{2e^x - e^{2x}}{x-1} > 0 \iff \dfrac{e^x(2 - e^x)}{x-1} > 0$. Or $e^x > 0$ donc $\dfrac{2e^x - e^{2x}}{x-1} > 0 \iff \dfrac{2 - e^x}{x-1} > 0$.
  De plus, $2 - e^x \geq 0 \iff e^x \leq 2 \iff x \leq \ln 2$.
  On peut alors dresser le tableau de signes du quotient :

x	$-\infty$		$\ln 2$		1		$+\infty$
Signe de $2 - e^x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du quotient		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

  Donc $\boxed{S =]\ln 2; 1[}$.

Fiche de calcul n°9

Trigonométrie

1. Tableau complété :

Angle α en degrés	Angle α en radians	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	1	0	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	1	impossible
120	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180	π	-1	0	0
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	impossible
300	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
360	2π	1	0	0

2.
- $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$
- $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$
- $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$

3.
- Soit $x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x - \sin x = 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}, \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x - \cos x + \cos x = -\sin x$

  donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x + \cos x = 2\cos x$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2\cos x}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}, \cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x - \cos x = -2\cos x$

  donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\cos x}$.

1. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, alors $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$.

   Or $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos\theta \leq 0$, alors $\cos\theta = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ainsi $\boxed{\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

2.
- Soit $x \in \mathbb{R}, 2\sin x = 1 \Longleftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  Or $x \in [-\pi; \pi]$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}, 1 - \sqrt{2}\cos x = 0 \Longleftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  Or $x \in [0; 2\pi]$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}}$.
- $\boxed{S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}, \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Longleftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  Or $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}\right\}}$.
- Soit $x \in \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \sin x \Longleftrightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0$ ou $\sin x = 1 \Longleftrightarrow x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  Or $x \in [-\pi; \pi]$ donc $\boxed{S = \left\{-\pi; 0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}, \sin x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Longleftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \Longleftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

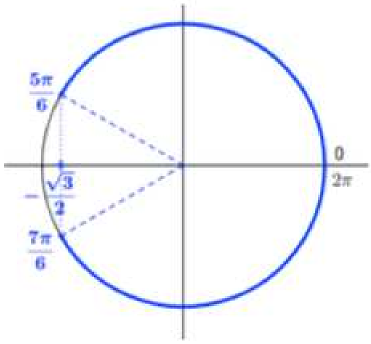
  $\sin x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  Or $x \in [0; 2\pi]$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}}$.
- Soit $x \in [0; 2\pi]$ alors $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$.

  Alors $\boxed{S = \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]}$.

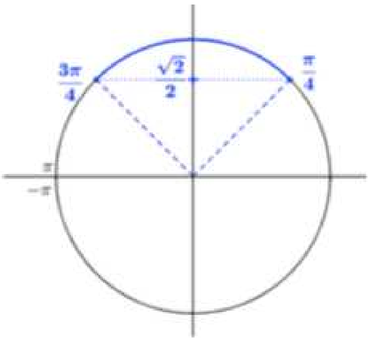
- Soit $x \in [0;2\pi], 2\sqrt{3}\cos x + 3 > 0 \iff \cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Donc $\boxed{S = \left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{6};2\pi\right]}$.

- Soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $2x \in [-\pi;\pi]$.

  $1-\sqrt{2}\sin 2x < 0 \iff \sin 2x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



  Donc $1-\sqrt{2}\sin 2x < 0 \iff \dfrac{\pi}{4} < 2x < \dfrac{3\pi}{4} \iff \dfrac{\pi}{8} < x < \dfrac{3\pi}{8}$.

  Ainsi $\boxed{S = \left]\dfrac{\pi}{8};\dfrac{3\pi}{8}\right[}$.

Fiche de calcul n°10

Dérivation

1.
   - La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\sin'(2x) = 2\cos(2x)$.
   - La dérivée de la fonction ln est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
   - La suite (u_n) est croissante.
   - La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;\infty[$.

2.
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R}$.
   - f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1;+\infty[$
   - $f \geq 0$ sur $[-1;+\infty[$.

3.
   - f est dérivable sur sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.
     Soit $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = x \times \dfrac{1}{x} + 1 \times \ln x = 1 + \ln x$.
     Donc $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = 1 + \ln x}$.
   - La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée et somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
     $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} - 3}$.
   - La fonction $x \mapsto 2x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
     $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\sin(2x+3)}$.
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4(2x-5)(x^2-5x)^3}$.
   - f est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
     Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(e^x+1)x - (e^x+x) \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.
     Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}}$.
   - ln est dérivable sur $]1;+\infty[$ à valeurs dans $]0;+\infty[$. Par composée, f est dérivable sur $]1;+\infty[$.
     $\boxed{\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}}$.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est dérivable sur $]-1;1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Or la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée, f est dérivable sur $]-1;1[$.

  Soit $x \in]-1;1[$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1-x^2}$.

  OU :

  $\forall x \in]-1;1[, f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\forall x \in]-1;1[, f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{2}{1-x^2}$.

  Donc $\boxed{\forall x \in]-1;1[, f'(x) = \dfrac{2}{1-x^2}}$.

- La fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Or la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}}$.

- f est dérivable sur $]1;+\infty[$.

  Soit $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

  Donc $\boxed{\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$.

- f est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$.

  Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

  Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

4.
- La tangente Δ a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

  f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

  Soit $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x(x+1)-(x^2-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.

  $f(0) = -2$ et $f'(0) = 2$ donc $\boxed{\Delta \text{ a pour équation } y = 2x-2}$.

- *On étudie le signe de $f(x) - (2x+2)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.*

  Soit $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) - (2x+2) = \dfrac{x^2-2}{x+1} - (2x-2) = \dfrac{(x^2-2)-(2x-2)(x+1)}{x+1} = \dfrac{x^2-2-2x^2-2x+2x+2}{x+1} = \dfrac{-x^2}{x+1}$.

  Or $\forall x \in]-1;+\infty[, x+1 > 0$ et $-x^2 \leq 0$ donc $\forall x \in]-1;+\infty[, \dfrac{-x^2}{x+1} \leq 0$.

  Ainsi $\forall x \in]-1;+\infty[, f(x) \leq y$. Donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ est en dessous de } \Delta \text{ sur }]-1;+\infty[}$.

Fiche de calcul n°11

Primitives

1.
- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - e^x}$.
- $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, F(x) = 2x - 8\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{x}}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^3$.
  Donc $f = \frac{1}{2}u'u^3$ avec $u(x) = 2x+1$, alors $F = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}u^4$.
  Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2)e^{-2x} + \frac{1}{3} \times 3e^{3x}$.
  Donc $f = -\frac{1}{2}u'e^u + \frac{1}{3}v'e^v$ avec $u(x) = -2x$ et $v(x) = 3x$, alors $F = -\frac{1}{2}e^u + \frac{1}{3}e^v$.
  Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{3x}}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin' x \sin^2 x$.
  Donc $f = u'u^2$ avec $u = \sin$, alors $F = \frac{1}{3}u^3$.
  Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x}$.
- Soit $x \in \left]0; \frac{4}{3}\right[$, $f(x) = \frac{\frac{1}{3} \times 3}{3x-4} - \frac{1}{x}$. Donc $f = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u} - v'$ avec $u(x) = 3x-4$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Alors $F = \frac{1}{3}\ln|u| - v$.
  Donc $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x-4| - \ln|x|$.
  Or $x \in \left]0; \frac{4}{3}\right[$ donc $x > 0$ et $3x - 4 < 0$.
  Ainsi $\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{4}{3}\right[, F(x) = \frac{1}{3}\ln(4-3x) - \ln x}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\frac{3}{2}(2x-4)}{x^2-4x+5}$. Donc $f = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 5$. Alors $F = \frac{3}{2}\ln|u|$.
  Donc $F(x) = \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5|$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 > 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)}$.
- Soit $x \in]-1;1[$, $f(x) = \frac{-4(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc $f = -4 \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1 - x^2$. Alors $F = -4 \times 2\sqrt{u}$.
  Donc $\boxed{\forall x \in]-1;1[, F(x) = -8\sqrt{1-x^2}}$.
- Soit $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x$. Donc $f = u'u$ avec $u = \ln$. Alors $F = \frac{1}{2}u^2$.
  Ainsi $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2}$.

2. • $J=\int_0^1 (x^2-2x+3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_0^1=\frac{1}{3}-1+3=\frac{7}{3}$. Donc $\boxed{I=\frac{7}{3}}$.

• $J=\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 3$.

Donc $\boxed{I=\frac{1}{2}\ln 3}$.

• $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x+\cos 4x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{I=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}}$.

• $J=\int_{-1}^1 x(x^2+1)^3\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 2x(x^2+1)^3\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(x^2+1)^4\right]_{-1}^1=0$. Donc $\boxed{I=0}$.

3. • Soit $x\in[1;e]$, on pose $\begin{cases} u'(x) &= x \\ v(x) &= \ln x\end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) &= \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) &= \frac{1}{x}\end{cases}$.

u et v sont des fonctions dérivables, à dérivées continues sur $[1;e]$.

Alors par intégration par parties, $J=\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2+1}{4}$.

Donc $\boxed{J=\frac{e^2+1}{4}}$.

• Soit $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on pose $\begin{cases} u'(x) &= \cos x \\ v(x) &= 2x+1\end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) &= \sin x \\ v'(x) &= 2\end{cases}$.

u et v sont des fonctions dérivables sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, à dérivées continues sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Alors par intégration par parties, $J=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2+1}{4}$.

Donc $\boxed{J=\frac{e^2+1}{4}}$.

$J=\left[(2x+1)\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,dx=\pi+1-(-\pi+1)(-1)-2[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2$.

Donc $\boxed{J=2}$.

Fiche de calcul n°12

Suites numériques

Suites explicites/suites récurrentes

1.
   - $\boxed{u_0 = \dfrac{12}{5}}$
   - $\boxed{u_1 = 8}$
   - $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+3}{5} \times 2^{n+1+2} = \dfrac{2n+5}{5} \times 2^{n+3}$ donc $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{2n+5}{5} \times 2^{n+3}}$.
   - $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5} \times 2^{3n+2} = \dfrac{6n+3}{5} \times 2^{3n+2}$ donc $\boxed{u_{3n} = \dfrac{6n+3}{5} \times 2^{3n+2}}$.
2.
   - $v_2 = 2v_1 + 3 = 2(2v_0+3)+3 = 2(2+3)+3 = 13$ donc $\boxed{\text{le troisième terme de } (v_n) \text{ est } v_2 = 13}$.
   - $v_3 = 2v_2 + 3 = 2\times 13 + 3 = 29$ donc $\boxed{v_3 = 29}$.
3.
   - $w_1 = \dfrac{1}{2} \times 4^2 = 8$, $w_2 = \dfrac{1}{2} \times 8^2 = 32$ et $w_3 = \dfrac{1}{2} \times 32^2 = 512$ donc $\boxed{\text{le troisième terme de } (w_n) \text{ est } w_3 = 512}$.
   - $\boxed{w_3 = 512}$
4.
   - $t_{2n} = \ln\left(\dfrac{(2n)^{2n}}{2^{2n}}\right) = \ln\left(\dfrac{2^{2n}\times n^{2n}}{2^{2n}}\right) = \ln(n^{2n}) = 2n\ln n$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_{2n} = 2n\ln n}$.
   - $t_{4n} = \ln\left(\dfrac{(4n)^{4n}}{2^{4n}}\right) = \ln\left(\dfrac{2^{4n}\times (2n)^{4n}}{2^{4n}}\right) = \ln((2n)^{4n}) = 4n\ln(2n)$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_{4n} = 4n\ln(2n)}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3(n+1)+2}{n+1+1} - \dfrac{3n+2}{n+1} = \dfrac{(3n+5)(n+1)-(3n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{3n^2+5n+3n+5-3n^2-6n-2n-4}{(n+2)(n+1)}$
   donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$.
   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
   Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

Suites arithmétiques/suites géométriques

1.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2n$ donc $u_9 = 1 + 2\times 9 = 19$.
     Ainsi $\boxed{\text{le dixième terme de } (u_n) \text{ est } u_9 = 19}$.
   - $u_0 + u_1 + \cdots + u_{99} = 100 \times \dfrac{u_0 + u_{99}}{2} = \dfrac{(1+1+2\times 99)\times 100}{2} = \dfrac{20000}{2} = 10000$ donc $\boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_{99} = 10000}$.
2.
   - $v_{103} = v_{102} + r$ et $v_{102} = v_{101} + r$ donc $v_{103} = v_{101} + 2r$. Or $v_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $v_{103} = \dfrac{3}{4}$ donc $\dfrac{3}{4} = \dfrac{2}{3} + 2r$. D'où $\boxed{r = \dfrac{1}{24}}$.
   - $r > 0$ donc $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$.
     Le terme général de (v_n) est $\boxed{v_n = v_0 + \dfrac{1}{24}n}$.
3.
   - $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\boxed{(w_n) \text{ est décroissante}}$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ donc $\boxed{w_{10} = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9}$.
   - $w_1 + w_2 + \cdots + w_{80} = 3 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{80}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{80}$ donc $\boxed{w_1 + w_2 + \cdots + w_{80} = 6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{80}}$.

Suites arithmético-géométriques

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2023 et a enregistré 2500 inscriptions en 2023.
Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents. On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).
On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2023 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2023+n$.

1. (a) $a_1 = 0,8 \times a_0 + 400 = 0,8 \times 2500 + 400 = 2400$. Donc $\boxed{a_1 = 2400}$.

   $a_2 = 0,8 \times a_1 + 400 = 0,8 \times 2400 + 400 = 2320$. Donc $\boxed{a_2 = 2320}$.

   (b) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 0,8a_n + 400}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a_{n+1} - 2000 = 0,8a_n + 400 - 2000 = 0,8a_n - 1600 = 0,8(a_n - 2000) = 0,8v_n$.
   Donc $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 0,8 \text{ et de premier terme } v_0 = 500.}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 500 \times 0,8^n$.
   Or $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a_n - 2000$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = v_n + 2000$.
   Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 500 \times 0,8^n + 2000}$.

   (c) $0 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$.

   Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2000}$.

   (d) $\boxed{\text{Au fil des années le nombre d'adhérents décroit et va venir se stabiliser vers 2000}}$.

Fiche de calcul n°13

Raisonnement par récurrence

Pour s'entraîner :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : "$u_n = 4+8\times 3^n$". Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

   1 Initialisation : $u_0 = 12$ et $4+8\times 3^0 = 4+8 = 12$ donc $u_0 = 4+8\times 3^0$.
   Ainsi P_0 est vraie.
   2 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = 4+8\times 3^n$.
   Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 4+8\times 3^{n+1}$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 4+8\times 3^n$.
   Or $u_{n+1} = 3u_n - 8$ donc $u_{n+1} = 3(4+8\times 3^n) - 8 = 12+3\times 8\times 3^n - 8 = 4+8\times 3^{n+1}$.
   Donc P_{n+1} est vraie.
   3 Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4+8\times 3^n}$.

2.
   - $u_2 = \dfrac{u_1}{\sqrt{u_1^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\boxed{u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

     $u_3 = \dfrac{u_2}{\sqrt{u_2^2+1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Donc $\boxed{u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.
   - $\boxed{\text{Il semble que pour tout } n \geq 1, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : "$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$". Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

     1 Initialisation : $u_1 = 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$ donc $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1}}$.
     Ainsi P_1 est vraie.
     2 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
     Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
     D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
     Or $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
     Donc P_{n+1} est vraie.
     3 Conclusion : La propriété est initialisée au rang 1 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
     Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : "$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$". Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

   1 Initialisation : $\dfrac{1\times 2}{2}=1$.
   Ainsi P_1 est vraie.
   2 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $1+2+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $1+2+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.
   Or $\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ donc $1+2+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   Alors P_{n+1} est vraie.
   3 Conclusion : La propriété est initialisée au rang 1 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n :"10^n-1 est un multiple de 9". Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

   1 Initialisation : $10^0-1=1-1=0$ et 0 est un multiple de 9.
   Ainsi P_0 est vraie.
   2 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que 10^n-1 est un multiple de 9.
   Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $10^{n+1}-1$ est un multiple de 9.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $\exists k \in \mathbb{N} / 10^n-1=9k$.
   Donc $10^{n+1}-1=10\times 10^n-1=10\times(9k+1)-1=9\times 10k+9=9(10k+1)$.
   Posons $k'=10k+1$. Donc $\exists k' \in \mathbb{N}/10^{n+1}-1=9k'$. Ainsi $10^{n+1}-1$ est un multiple de 9.
   Donc P_{n+1} est vraie.
   3 Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, 10^n-1 \text{ est un multiple de 9.}}$.

5. Soit $x \in]0;+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : "$(1+x)^n \geq 1+nx$". Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

   1 Initialisation : $(1+x)^0=1$ et $1+0\times x=1$ donc $(1+x)^0 \geq 1+0\times x$.
   Ainsi P_0 est vraie.
   2 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $(1+x)^n \geq 1+nx$.
   Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
   $(1+x)^{n+1}=(1+x)^n\times(1+x)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $(1+x)^n \geq 1+nx$ donc $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$.
   Or $(1+nx)(1+x)=1+x+nx+nx^2=1+(n+1)x+nx^2$ et $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ (car $nx^2 \geq 0$)
   donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
   Ainsi P_{n+1} est vraie.
   3 Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx}$.

Fiche de calcul n°14

Limites

Limites de suites

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $n^3-2n^2+2=n^3\left(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)=1$.

   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty$. Ainsi par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-2n^2+2)=+\infty}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{2n^2+n+2}{1-n}=\dfrac{n^2\left(2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}=\dfrac{n\left(2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}-1}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)=-1$.

   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+n+2}{1-n}=-\infty}$.

3. $\left|\frac{4}{5}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}-3n=-\infty$. Ainsi par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3n+\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)=-\infty}$.

4. $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=0}$.

Limites de fonctions

1. Soit $n\in\mathbb{N}$.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$
   - Si $n\in\mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ et si $n=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=+\infty$.
   - Si $n\in\mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$ et si $n=0$ alors $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=-\infty$.

2.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty}3e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x-x+2)=+\infty}$.
   - $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to0^+}3\ln x=-\infty$.

     De plus, $\lim\limits_{x\to0^+}x^2=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{2}{x}=-\infty$ donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2-\frac{2}{x}+3\ln x\right)=-\infty}$.

     Ainsi $\boxed{\text{l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de la fonction } x\mapsto x^2-\frac{2}{x}+3\ln x}$.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}-3x+4=10$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}2+x=0^-$ donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{-3x+4}{2+x}=-\infty}$.

     Ainsi $\boxed{\text{la droite d'équation } x=-2 \text{ est asymptote verticale à la courbe de la fonction } x\mapsto\dfrac{-3x+4}{2+x}}$.
   - $\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{x}=-\infty$. Or $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc par composée, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0}$.

- Soit $x\in]-\infty;-2[$, $\dfrac{x^2-3x+7}{4-x^2}=\dfrac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=\dfrac{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-1}$.

  Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}-1=-1$.

  Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+7}{4-x^2}=-1}$.

  Alors $\boxed{\text{la droite d'équation } y=-1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction } x\mapsto\dfrac{x^2-3x+7}{4-x^2} \text{ en } -\infty}$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(x^2-3x+7)=5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(4-x^2)=0^+$ donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{x^2-3x+7}{4-x^2}=+\infty}$

  Alors $\boxed{\text{la droite d'équation } x=2 \text{ est asymptote verticale à la courbe de la fonction } x\mapsto\dfrac{x^2-3x+7}{4-x^2}}$.

- Soit $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=\dfrac{e^x(1-\frac{2}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\dfrac{1-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$.

  Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{e^x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)=1$ alors par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=1}$.

  Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y=1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction } x\mapsto\dfrac{e^x-2}{e^x+1}}$.

- Soit $x\in]-\infty;0[$, $2e^{-x}-3x^2+x+1=x^2\left(\dfrac{2}{x^2e^x}-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

  Or $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0^+$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2e^x}=+\infty$.

  Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x^2e^x}-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$. Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{-x}-3x^2+x+1)=+\infty}$.

- Soit $x\in]-\infty;0[$, $x^2+2x-4\ln x=x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-4\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}-4\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=1$. Ainsi par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x-4\ln x)=+\infty}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=3$ donc par composée, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3x-2}{x+1}\right)=\ln3}$.

  Alors $\boxed{\text{la droite d'équation } y=\ln3 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction } x\mapsto\ln\left(\dfrac{3x-2}{x+1}\right) \text{ en } +\infty}$.

Fiche de calcul n°15

Géométrie dans le plan : produit scalaire et applications

Exercice 1

Montrons que $EFGH$ est un parallélogramme qui possède un angle droit, ce qui caractérise un rectangle.

- ⋆ On remarque que les points E, F, G et H sont distincts.
- ⋆ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-8\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}-8\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. Par conséquent $EFGH$ est un parallélogramme.
- ⋆ $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}2\\16\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG}=(-8)\times 2+1\times 16=0$.

Ainsi $\boxed{EFGH \text{ est un rectangle.}}$

Exercice 2

1. *Pas de difficultés.*
2. (a) On trace le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (d) coupe ce cercle en deux points.
   $\boxed{\text{Il semble donc, d'après la figure, qu'il y ait deux points solutions au problème}}$.

   (b) i. Si $M\in(d)$ alors $\boxed{y=2x}$.

   ii. En utilisant le fait que $y=2x$, on obtient $\boxed{\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}6-x\\1-2x\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-3-x\\3-2x\end{pmatrix}}$.

   iii. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(6-x)(-x-3)+(1-2x)(3-2x)=x^2-3x-18+4x^2-8x+3=5x^2-11x-15$.
   Donc $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5x^2-11x-15}$.

   iv. (MA) perpendiculaire à (MB) donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
   On résout donc $5x^2-11x-15=0$.
   On trouve $x_1=\dfrac{11+\sqrt{421}}{10}$ et $x_2=\dfrac{11-\sqrt{421}}{10}$.
   Ainsi, si $M\in(d)$, on trouve deux points solutions au problème : $M_1\left(\dfrac{11+\sqrt{421}}{10};\dfrac{11+\sqrt{421}}{5}\right)$ et $M_2\left(\dfrac{11-\sqrt{421}}{10};\dfrac{11-\sqrt{421}}{5}\right)$.
   Il reste à vérifier que $M_1\in(d)$, $M_2\in(d)$, $\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{BM_1}=0$ et $\overrightarrow{AM_2}\cdot\overrightarrow{BM_2}=0$.
   Vérifier que $M_1\in(d)$ et $M_2\in(d)$ est immédiat en utilisant l'équation de (d).
   Le calcul des deux produits scalaires est laissé au lecteur.
   $\boxed{\text{Ainsi, il existe deux points appartenant à la droite } (d) \text{ tels que } (AM) \text{ et } (BM) \text{ sont perpendiculaires :}}$
   $\boxed{\text{ce sont les points } M_1\left(\dfrac{11+\sqrt{421}}{10};\dfrac{11+\sqrt{421}}{5}\right) \text{ et } M_2\left(\dfrac{11-\sqrt{421}}{10};\dfrac{11-\sqrt{421}}{5}\right)}$.

Exercice 3

1. Soit $M(x,y)$ un point du plan.
$M \in \mathscr{C} \iff x^2+y^2-2x-4y+3=0 \iff (x-1)^2-1+(y-2)^2-4+3=0 \iff (x-1)^2+(y-2)^2=2$.
Donc $\boxed{A(1;2) \text{ est le centre de } \mathscr{C} \text{ et } R=\sqrt{2} \text{ est le rayon de } \mathscr{C}}$.
2. $2^2+3^2-2\times 2-4\times 3+3=4+9-4-12+3=0$ donc $\boxed{B \in \mathscr{C}}$.
3. $2+3-5=0$ donc $B \in (d)$.
De plus, un vecteur directeur de (d) est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=(2-1)\times(-1)+(3-2)\times 1=-1+1=0$ donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire à (d). Ainsi $\boxed{(d) \text{ est tangente à } \mathscr{C} \text{ au point } B}$.

Exercice 4

1. Si $x=2$ alors $y=0$ et si $x=5$ alors $y=1$.
On trace donc la droite passant par les points de coordonnées $A'(2,0)$ et $B'(5,1)$.
2. $\boxed{\text{Un vecteur normal à la droite } (d) \text{ est le vecteur } \vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}}$.
3. Notons (d') la droite perpendiculaire à (d) et passant par A.
Alors $\vec{n}$, vecteur normal à (d), est un vecteur directeur de (d').
Une équation cartésienne de (d') est donc de la forme $-3x-y+c=0$ avec c un réel.
Or $A(-3,5)\in(d')$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d'). D'où $-3\times(-3)-5+c=0$. Donc $c=-4$.
$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (d') \text{ est donc } -3x-y-4=0}$.
4. H appartient aux droites (d) et (d') donc ses coordonnées sont solutions du système : $\begin{cases}-3x-y-4=0\\-x+3y+2=0\end{cases}$.
Après résolution du système, on trouve que $\boxed{H \text{ a pour coordonnées } (-1;-1)}$.
5. La distance entre le point A et la droite (d) est la distance AH.
Or $AH=\sqrt{(-1+3)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.
Donc $\boxed{\text{la distance entre le point } A \text{ et la droite } (d) \text{ est égale à } 2\sqrt{10}}$.

Fiche de calcul n°16

Géométrie dans l'espace

Exercice 1

1. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ et l'on constate que $\overrightarrow{AM} = -2\vec{u}$.

   $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ étant colinéaires, $\boxed{\text{le point } M \text{ appartient à la droite } (d)}$.

2. On remarque que $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-3\\-11\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\,\vec{v}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc $\boxed{M \text{ appartient à la droite } (d')}$.

3. $\vec{u} \neq \vec{0}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \neq \lambda\vec{u}$. Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires et les droites ont le point commun M. $\boxed{\text{Elles sont donc } \textit{sécantes} \text{ en } M}$.

Exercice 2

1. (a) B est le milieu de $[AM]$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$. D'où $\begin{cases} x_M = x_B + x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_M = y_B + y_{\overrightarrow{AB}} \\ z_M = z_B + z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$ et $\begin{cases} x_M = 2x_B - x_A \\ y_M = 2y_B - y_A \\ z_M = 2z_B - z_A \end{cases}$.

   Après calculs, $\boxed{M(-6, 13, 17)}$.

   (b) On cherche α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-8\\14\\20\end{pmatrix}$.

   On résout alors le système $\begin{cases} -8 = 2\alpha - \beta \\ 14 = \alpha + 4\beta \\ 20 = 0 \times \alpha + 4\beta \end{cases}$.

   Les solutions sont $\alpha = -2$ et $\beta = 4$. Ainsi $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc $\boxed{M \in \mathscr{P}}$.

2. (a) Supposons que $C \in \mathscr{P}$. Alors il existe des réels α, β tels que $\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Or $\overrightarrow{AC} = (10, -7, -8)$ implique $5\beta = -8$, donc $\beta = -\frac{8}{5}$; puis $\alpha + 4\beta = -7$ donne $\alpha = -\frac{3}{5}$, et alors $2\alpha - \beta = \frac{2}{5} \neq 10$, contradiction. Donc $\boxed{C \notin \mathscr{P}}$.

   (b) Comme $M \in \mathscr{P}$ et $C \notin \mathscr{P}$, la droite (MC) coupe $\mathscr{P}$ en M : $\boxed{(MC) \text{ est } \textit{sécante} \text{ au plan } \mathscr{P}}$.

Exercice 3

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4+7-3=0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et ainsi le triangle $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A}$.

   (b) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$, d'où $\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=5-6+12=11,\quad BA=\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{11},\quad BC=\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{77}}$.

   (c) L'angle $\widehat{ABC}$ vérifie : $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|}=\dfrac{11}{\sqrt{11}\sqrt{77}}$ donc $\boxed{\widehat{ABC}\approx 68°}$.

2. (a) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ car $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-2-1+3=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=8-7-1=0$.

   $\boxed{\vec{n} \text{ est donc un vecteur normal à } (ABC)}$.

   (b) $\boxed{\text{La droite } \mathscr{D} \text{ orthogonale à } (ABC) \text{ et passant par } E \text{ a pour représentation paramétrique : } \begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=4-t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R}).}$

   (c) Il suffit de vérifier les points suivants :

   — la droite (EH) est orthogonale au plan (ABC),

   — le point H est bien dans le plan (ABC).

   La droite (EH) **est orthogonale au plan** (ABC) : en effet, les coordonnées de $\overrightarrow{EH}$ sont $\begin{pmatrix}3\\-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{EH}=\frac{3}{2}\vec{n}$.

   $\vec{n}$ étant un vecteur normal au plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{EH}$ l'est également.

   Le point H **est bien dans le plan** (ABC) : les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ sont $\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}.\vec{n}=0$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est donc parallèle au plan (ABC) et donc le point H appartient à ce plan.

   Ainsi, $\boxed{\text{le point } H\left(4;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right) \text{ est le projeté orthogonal du point } E \text{ sur le plan } (ABC)}$.