

TD 1 : Logique et raisonnements



OBJECTIFS :

- C0 : Savoir formuler la négation d'une proposition.
- C1 : Savoir rédiger une démonstration commençant par $\forall$.
- C2 : Savoir démontrer une existence.
- C3 : Savoir nier une assertion et donner un contre-exemple.
- C4 : Savoir démontrer une implication.
- C5 : Savoir raisonner par contraposition.
- C6 : Savoir démontrer une équivalence.
- C7 : Savoir raisonner par disjonction de cas.
- C8 : Savoir construire un contre-exemple.
- C9 : Savoir raisonner par l'absurde.

EXERCICE 1

Vrai ou faux? Justifier.

1. $\exists x \in \mathbb{R}_+, x < \sqrt{x}$.
2. $\forall (x, x') \in (\mathbb{R} \setminus \{2\})^2, x \neq x' \implies \frac{x+2}{x-2} \neq \frac{x'+2}{x'-2}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geq 0 \implies x \geq 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$.
5. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$.
6. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R} / y = x^2$.

EXERCICE 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Le plan est muni d'un repère.

1. Ecrire les assertions suivantes avec des quantificateurs.
 - f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
 - f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
 - f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - f est paire.
2. Ecrire la négation des propositions ci-dessus en français puis avec des quantificateurs.

EXERCICE 3

Peut-on compléter les phrases suivantes par le symbole $\Rightarrow$? Le symbole $\Leftarrow$?
Le symbole $\iff$? Les réponses devront être justifiées.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1) \dots (e^x \geq 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \dots (x^2 \geq y^2)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x = y) \dots (\cos(x) = \cos(y))$
4. $\forall m \in \mathbb{N}, (m \text{ pair}) \dots (m \text{ multiple de } 6)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (\cos(x) = \cos(y)) \dots (x^2 = y^2)$

EXERCICE 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les assertions suivantes :

$P : \langle \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \rangle$

$Q : \langle \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \rangle$

$R : \langle (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0) \rangle$.

Parmi les implications suivantes, lesquelles sont correctes :

1. $P \implies Q$
2. $Q \implies P$
3. $Q \implies R$
4. $\text{non}(R) \implies Q$
5. $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$
6. $\text{non}(P) \implies \text{non}(R)$?

EXERCICE 5

Soit a et b deux réels. On considère la proposition suivante :
Si $a + b$ est irrationnelle alors a ou b sont irrationnels.

1. Quelle est la contraposée de cette proposition?
2. Démontrer la proposition.
3. Est-ce que la réciproque de cette proposition est vraie?

EXERCICE 6

1. On pose $E = \{1, 2, 3\}$ et $G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 1)\}$.

(a) Donner la négation des assertions :

- i. $\forall x \in E, (x, x) \in G$.
- ii. $\forall x \in E, \forall y \in E, (x, y) \in G \implies (y, x) \in G$.
- iii. $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, ((x, y) \in G \text{ et } (y, z) \in G) \implies (x, z) \in G$.

(b) Les assertions précédentes sont-elles vraies ou fausses?

Justifier soigneusement.

2. Pour tout x et y dans $\mathbb{N}$, on note $x\mathcal{R}y$ lorsque :

$$\exists k \in \mathbb{Z} / x - y = 3k$$

Montrer que :

- (a) $\forall x \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}x$.
- (b) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

EXERCICE 7

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$.
2. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies xy - x - y + 1 \neq 0$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $n^3 - n + 2024$ est un entier pair.
5. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 1| = x$.