

TD 1 : Logique et raisonnements

Elements de correction

EXERCICE 5

Soit a et b deux réels. On considère la proposition suivante :
Si $a + b$ est irrationnelle alors a ou b sont irrationnels.

1. Quelle est la contraposée de cette proposition?

La contraposée de cette proposition est : si a et b sont rationnels, alors $a + b$ est rationnel.

2. Démontrer la proposition.

On va démontrer la contraposée, ce qui va prouver la proposition.

On suppose donc que a et b sont rationnels.

Ils s'écrivent alors $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$, avec p, p', q, q' des entiers relatifs, et q, q' non nuls. On calcule $a + b$ en réduisant au même dénominateur :

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

Le nombre $a + b$ est le quotient de deux entiers dont l'un non nul, c'est donc un rationnel.

La contraposée est donc vraie, on a ainsi démontré la proposition de l'énoncé.

3. Est-ce que la réciproque de cette proposition est vraie?

La réciproque de la proposition est : si a ou b sont irrationnels, alors $a + b$ est irrationnel.

Ce n'est pas toujours le cas.

Par exemple, si $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$, alors a ou b sont irrationnels et pourtant $a + b$ n'est pas irrationnel.

EXERCICE 7

5. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Raisonnons par l'absurde.

On suppose donc que n est le carré d'un entier, et que $2n$ est lui aussi le carré d'un entier.

Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p^2$ et il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n = q^2$.

Alors, en faisant le quotient, on obtient $2 = \frac{q^2}{p^2}$ et en prenant la racine carrée,

puisque tout est positif, on obtient $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$.

Ainsi $\sqrt{2}$ est un rationnel. Absurde!

Donc si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 1| = x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par disjonction de cas.

Premier cas : $x \geq 1$.

Alors $|x - 1| = x \iff x - 1 = x \iff -1 = 0$. Impossible!

Deuxième cas : $x < 1$.

Alors $|x - 1| = x \iff 1 - x = x \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} < 1$ donc $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.