TD 2 : Ensembles et applications

Eléments de correction

EXERCICE 4

4. Montrer que : $A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$.
($\Longrightarrow$) Supposons que $A \cup B = A \cup C$ et montrons que $A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$ par double inclusion.
($\subset$) Soit $x \in A \cup \overline{B}$. Deux cas possibles :
Cas 1 : $x \in A$. Alors $x \in A \cup \overline{C}$.
Cas 2 : $x \notin A$. Alors $x \in \overline{B}$. Donc $x \notin B$ et par conséquent, $x \notin A \cup B$.
Or $A \cup B = A \cup C$ donc $x \notin A \cup C$. Alors $x \notin C$ et donc $x \in \overline{C}$.
De plus, $\overline{C} \subset A \cup \overline{C}$ donc $x \in A \cup \overline{C}$.
Dans tous les cas, $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$.
($\supset$) *La preuve est laissée au lecteur*
($\Longleftarrow$) *La preuve est laissée au lecteur*
Ccl : $\boxed{A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.}$

EXERCICE 5

1. $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) = E \cap (A \cup B) = A \cup B$.
2. $A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B$.
3. $\overline{A \cup B \cup \overline{C}} \cap (A \cap \overline{B}) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap A \cap \overline{B} = \emptyset \cap \overline{B} \cap C = \emptyset$.

EXERCICE 7

3. Montrons que $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.
($\subset$) Soit $(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1)$. Alors $(x, y) \in A_1 \times B_1$ ou $(x, y) \in A_2 \times B_1$.
Donc ($x \in A_1$ et $y \in B_1$) ou ($x \in A_2$ et $y \in B_1$). Ainsi $x \in A_1 \cup A_2$ et $y \in B_1$.
D'où $(x, y) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1$.
($\supset$) Soit $(x, y) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1$. Alors $x \in A_1 \cup A_2$ et $y \in B_1$.
Donc $x \in A_1$ ou $x \in A_2$.
<u>1er cas :</u> Si $x \in A_1$, alors $(x, y) \in A_1 \times B_1$.
<u>2ème cas :</u> Si $x \notin A_1$ alors $x \in A_2$ et donc $(x, y) \in A_2 \times B_1$.
Dans tous les cas, $(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1)$.
Conclusion : $\boxed{(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1.}$