TD 2 : Ensembles et applications

Eléments de correction

EXERCICE 4

4. Montrer que : $A\cup B = A\cup C \iff A\cup\overline{B} = A\cup\overline{C}$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $A\cup B = A\cup C$ et montrons que $A\cup\overline{B} = A\cup\overline{C}$ par double inclusion.

($\subset$) Soit $x\in A\cup\overline{B}$. Deux cas possibles :

Cas 1 : $x\in A$. Alors $x\in A\cup\overline{C}$.

Cas 2 : $x\notin A$. Alors $x\in\overline{B}$. Donc $x\notin B$ et par conséquent, $x\notin A\cup B$.

Or $A\cup B = A\cup C$ donc $x\notin A\cup C$. Alors $x\notin C$ et donc $x\in\overline{C}$.

De plus, $\overline{C}\subset A\cup\overline{C}$ donc $x\in A\cup\overline{C}$.

Dans tous les cas, $A\cup\overline{B}\subset A\cup\overline{C}$.

($\supset$) *La preuve est laissée au lecteur*

($\Longleftarrow$) *La preuve est laissée au lecteur*

Ccl : $\boxed{A\cup B = A\cup C \iff A\cup\overline{B} = A\cup\overline{C}.}$

EXERCICE 5

1. $A\cup(\overline{A}\cap B) = (A\cup\overline{A})\cap(A\cup B) = E\cap(A\cup B) = A\cup B$.
2. $A\cap(\overline{A}\cup B) = (A\cap\overline{A})\cup(A\cap B) = \varnothing\cup(A\cap B) = A\cap B$.
3. $\overline{A\cup B\cup\overline{C}}\cap(A\cap\overline{B}) = \overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap A\cap\overline{B} = \emptyset\cap\overline{B}\cap C = \emptyset$.

EXERCICE 7

3. Montrons que $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_1) = (A_1\cup A_2)\times B_1$.

($\subset$) Soit $(x,y)\in(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_1)$. Alors $(x,y)\in A_1\times B_1$ ou $(x,y)\in A_2\times B_1$.

Donc ($x\in A_1$ et $y\in B_1$) ou ($x\in A_2$ et $y\in B_1$). Ainsi $x\in A_1\cup A_2$ et $y\in B_1$.

D'où $(x,y)\in(A_1\cup A_2)\times B_1$.

($\supset$) Soit $(x,y)\in(A_1\cup A_2)\times B_1$. Alors $x\in A_1\cup A_2$ et $y\in B_1$.

Donc $x\in A_1$ ou $x\in A_2$.

<u>1er cas :</u> Si $x\in A_1$, alors $(x,y)\in A_1\times B_1$.

<u>2ème cas :</u> Si $x\notin A_1$ alors $x\in A_2$ et donc $(x,y)\in A_2\times B_1$.

Dans tous les cas, $(x,y)\in(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_1)$.

Conclusion : $\boxed{(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_1) = (A_1\cup A_2)\times B_1.}$

EXERCICE 11

Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \quad \text{est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si} \quad n \quad \text{est impair} \end{cases}.$$

Montrer que f est bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ et déterminer son application réciproque f^{-1}.

Soit $a\in\mathbb{Z}$. Existe-il un unique $n\in\mathbb{N}$ tel que $f(n)=a$?

<u>1er cas :</u> $a\in\mathbb{N}$. Posons $n=2a$. Alors $n\in\mathbb{N}$, n est pair et donc $f(n) = \dfrac{2a}{2} = a$.

Donc n existe et est unique.

<u>2ème cas :</u> $a\in\mathbb{Z}_-^*$. Posons $n=-2a-1$. Alors $n\in\mathbb{N}$, n est impair et donc $f(n) = -\dfrac{-2a-1+1}{2} = a$.

Donc n existe et est unique. On a donc montré que $\forall a\in\mathbb{Z}, \exists! n\in\mathbb{N} / f(n)=a$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{N} \text{ sur } \mathbb{Z}}$ et son application réciproque est f^{-1} définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ par $\boxed{\forall a\in\mathbb{Z}, f^{-1}(a) = \begin{cases} 2a & \text{si} \quad a\geq 0 \\ -2a-1 & \text{si} \quad a<0 \end{cases}.}$

EXERCICE 12

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x, 2x+1)$ et g l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = 2x + y$.

1. f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

    - Injectivité de f :
      Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(x')$.
      Alors $\begin{cases} 2x = 2x' \\ 2x+1 = 2x'+1 \end{cases}$ et donc $2x = 2x'$. D'où $x = x'$.
      Donc $\boxed{f \text{ est injective sur } \mathbb{R}}$.
    - Surjectivité de f :
      $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (0,0)$.
      Alors $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2x+1 = 0 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$: Absurde.
      Ainsi $(0,0)$ n'admet pas d'antécédent par f. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^2}$.
      Alors $\boxed{f \text{ n'est pas bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^2}$.
    - Injectivité de g :
      $g(0,0) = 0$ et $g(1,-2) = 0$. Donc $g(0,0) = g(1,-2)$ et $(0,0) \neq (1,-2)$.
      Alors $\boxed{g \text{ n'est pas injective sur } \mathbb{R}^2}$ et donc
      $\boxed{g \text{ n'est pas bijective de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}}$.
    - Surjectivité de g : Soit $a \in \mathbb{R}$, existe-t-il $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x,y) = a$?
      Posons $(x,y) = (0,a)$.
      Alors $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $g(x,y) = g(0,a) = 2 \times 0 + a = a$.
      Donc il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x,y) = a$.
      Ainsi $\boxed{g \text{ est surjective de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}}$.

2. Donner, si elle existe, l'expression $g \circ f$ puis de $f \circ g$. Sont-elles bijectives ? Si oui, donner l'expression de leur application réciproque.

   f est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et g est définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc $g \circ f$ existe et est définie de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
   Soit $x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x, 2x+1) = 2(2x) + (2x+1) = 6x + 1$.
   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = 6x + 1}$.

   g est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et f est définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, donc $f \circ g$ existe et est définie de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(2x+y) = (2(2x+y), 2(2x+y)+1) = (4x+2y, 4x+2y+1)$.
   Donc $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (f \circ g)(x,y) = (4x+2y, 4x+2y+1)}$.
   Soit $y \in \mathbb{R}$, existe-t-il un unique réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = (g \circ f)(x)$?
   On suppose qu'un tel $x \in \mathbb{R}$ existe.
   $y = (g \circ f)(x) \iff y = 6x + 1 \iff x = \dfrac{1}{6}y - \dfrac{1}{6}$, donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = (g \circ f)(x)$ et ce réel est unique.
   Ainsi $\boxed{g \circ f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, (g \circ f)^{-1}(y) = \dfrac{1}{6}y - \dfrac{1}{6}}$.
   Montrons que $(0,0)$ n'a pas d'antécédent par $f \circ g$.
   On suppose que $(0,0)$ a un antécédent par $f \circ g$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(f \circ g)(x,y) = (0,0)$.
   Or $(f \circ g)(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x + 4y = 0 & L_1 \\ 2x + 4y + 1 = 0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 4y = 0 & \\ 1 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$.
   Absurde ! Donc $(0,0)$ n'a pas d'antécédent par $f \circ g$, alors $\boxed{f \circ g \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^2}$.
   Ainsi $\boxed{f \circ g \text{ n'est pas bijective de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^2}$.

EXERCICE 13

3. Montrer que si $g \circ f$ est bijective de E sur G alors f est injective sur E et g est surjective de F sur G.

Supposons que $g \circ f$ est bijective de E sur G.
Alors $g \circ f$ est injective sur E et surjective de E sur G.
Alors d'après la question 1.a, f est injective sur E et d'après la question 2.a, g est surjective de F sur G.
Ainsi $\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est bijective de } E \text{ sur } G \text{ alors } f \text{ est injective sur } E \text{ et } g \text{ est surjective de } F \text{ sur } G.}$