TD 2

OBJECTIFS :

- AL 3-1 : Connaître parfaitement la signification des symboles ensemblistes et maîtriser leur utilisation.
- AL 3-2 : Décrire en compréhension un ensemble.
- AL 3-3 : Savoir montrer l'égalité de deux ensembles.
- AL 3-4 : Connaître la définition du produit cartésien et maîtriser son utilisation.
- AL 4-1, AL 4-2 : Déterminer l'image directe, l'image réciproque d'une partie d'un ensemble par une application.
- AL 4-1, AL 4-2, AL 4-3 : Montrer qu'une application est injective, surjective, bijective, ou non.
- AL 4-4 : Déterminer l'application réciproque d'une application bijective.

Ensembles

Exercice 1

Décrire en compréhension les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{1;3;5;\cdots\}$
2. $E_2 = \{1;10;100;1000;\cdots\}$
3. E_3 est l'ensemble des valeurs prises par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $y \in \mathbb{R}$. E_4 est l'ensemble des antécédents de y par une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$.
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $a \in E$
- $b \subset E$
- $\{c\} \subset E$
- $\emptyset \in E$
- $\emptyset \subset E$
- $\{\emptyset\} \subset E$
- $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$

Exercice 3

Soit x un élément d'un ensemble E non vide.
Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{x\}))$.

Exercice 4

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Les questions sont indépendantes.

1. A-t-on $(C \subset A \cup B) \Longrightarrow (C \subset A$ ou $C \subset B)$?
2. Montrer que $(A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A \subset B$. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
3. (a) Montrer que $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.
   (b) L'assertion suivante est-elle vraie ?
   $$A \subset C \Longrightarrow (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$
4. Montrer que $A \cup B = A \cup C \Longleftrightarrow A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$.

Exercice 5

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

1. $A \cup (\overline{A} \cap B)$
2. $A \cap (\overline{A} \cup B)$
3. $\overline{A \cup B \cup \overline{C}} \cap (A \cap \overline{B})$

EXERCICE 6

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $A = \{(t+1; 4t+3), t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x - y = 1\}$.
   Montrer que $A = B$.
2. Soit $A = \{(2t, t^2+1), t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$.
   Montrer que $A \subset B$. A-t-on l'égalité ?
3. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

EXERCICE 7

Soit E et F deux ensembles.
A_1 et A_2 sont des parties de E ; B_1 et B_2 sont des parties de F.

1. Montrer que $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.
2. A-t-on $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?
3. Montrer que $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

Applications

EXERCICE 8

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$.
   Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f\big([-4; 0]\big)$, $f\big(]-2; +\infty[\big)$, $f^{-1}(\{-5\})$, $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}\big([0; +\infty[\big)$.
2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(\pi x)$.
   (a) Déterminer l'image directe de $]0; 1]$ par f.
   (b) Déterminer l'image réciproque de $\{0\}$ puis de $[0; 1]$ par f.
3. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x - 3y$.
   Déterminer $f(\Delta)$ avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ et $f^{-1}(\{0\})$.
4. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x - y, 2x + y)$.
   (a) Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$. Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.
   (b) Soit $\Delta' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 1\}$. Déterminer $f(\Delta')$ et $f^{-1}(\Delta')$.

EXERCICE 9

Soit E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.

1. Soit $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^2$.
   (a) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (c) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   Montrer qu'il y a égalité si f est injective sur E.
2. Soit $(C, D) \in \big(\mathscr{P}(F)\big)^2$.
   (a) Montrer que $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
   (c) Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

EXERCICE 10

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
Justifier. Dans le cas où elle est bijective, déterminer son application réciproque.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 2n+3 \end{array}$
4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
5. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y^2+1) \end{array}$
6. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$
7. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x+3y, x-y) \end{array}$

EXERCICE 11

Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$f(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \quad \text{est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si} \quad n \quad \text{est impair} \end{cases}.$$

Montrer que f est bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ et déterminer son application réciproque f^{-1}.

EXERCICE 12

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=(2x, 2x+1)$ et g l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y)=2x+y$.

1. f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
2. Donner, si elle existe, l'expression $g \circ f$ puis de $f \circ g$. Sont-elles bijectives ? Si oui, donner l'expression de leur application réciproque.

EXERCICE 13

Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit f une application définie de E dans F et g une application de F dans G.

1. (a) Montrer que si $g \circ f$ est injective sur E alors f est injective sur E.
   (b) Montrer que si $g \circ f$ est injective sur E et que f est surjective de E sur F, alors g est injective sur F.
2. (a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E sur G alors g est surjective de F sur G.
   (b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E sur G et que g est injective sur F , alors f est surjective de E sur F.
3. Montrer que si $g \circ f$ est bijective de E sur G alors f est injective sur E et g est surjective de F sur G.