TD 3 : Calcul matriciel et systèmes linéaires.

OBJECTIFS :

- AL 5-1 : Calculer des produits de matrices.
- AL 5-2 : Calculer les puissances d'une matrice carrée.
- AL 5-3 : Vérifier l'inversibilité d'une matrice carrée et calculer son inverse.
- AL 5-4 : Faire le lien entre systèmes linéaires et matrices.
- AL 5-5 : Utiliser les opérations élémentaires sur les lignes pour déterminer l'inverse d'une matrice.
- AL 5-6 : Savoir transformer un système linéaire en un système échelonné.
- AL 5-7 : Résoudre un système avec la méthode du pivot de Gauss.
- AL 5-8 : Savoir utiliser la résolution d'un système pour déterminer l'intersection de droites du plan, l'intersection de droites et plans de l'espace.
- AL 5-9 : Résoudre un système linéaire avec paramètre(s).

EXERCICE 1

On considère les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2 & 5\\0 & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\0 & 4 & 0\\0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\-2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Quels sont les produits matriciels possibles? Les effectuer.

EXERCICE 2

Soit $k\in\mathbb{N}$, calculer A^k dans chacun des cas :

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$
3. A est la matrice d'ordre n ($n\geq 2$) comportant que des 1.

EXERCICE 3

1. Montrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore symétrique.

EXERCICE 4

1. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $A^2-2A-I_2=0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

   Remarque :
   On dit que le polynôme $P(X)=X^2-2X-1$ est un polynôme annulateur de A.

   (b) En déduire que A est inversible et préciser son inverse.

2. On considère la matrice $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

   Montrer que $Q(X)=X^3-3X+3$ est un polynôme annulateur de B.
   En déduire que B est inversible et préciser son inverse.

EXERCICE 5

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si elles le sont, déterminer leur inverse.

1. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\-1 & 2 & -1\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\3 & 1 & 2\\3 & 8 & 4\end{pmatrix}$.
2. Soit $n\geq 2$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A=\begin{pmatrix}1 & & (-1)\\ & \ddots & \\(0) & & 1\end{pmatrix}$.

3. Soit $n \geq 2$ et J la matrice d'ordre n comportant que des 1.

Exercice 6

Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble défini par $\mathscr{G} = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / \exists x \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathscr{G}$ appartient à $\mathscr{G}$ et que ce produit est commutatif.
2. Montrer que toute matrice de $\mathscr{G}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathscr{G}$.

Exercice 7

On s'intéresse dans cet exercice aux parties de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituées de matrices ayant une puissance égale à la matrice identité.
Plus précisément, on notera pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
$\mathscr{R}_n(p) = \left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^p = I_n \right\}$.

1. Soit $A \in \mathscr{R}_n(p)$.
   Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $A^{-1} \in \mathscr{R}_n(p)$.
2. Soit $A \in \mathscr{R}_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $P^{-1}AP \in \mathscr{R}_n(p)$.
3. Déterminer toutes les matrices diagonales appartenant à $\mathscr{R}_n(p)$.
   Combien y en a-t-il ?

Exercice 8

Soit f et g les applications définies de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :
$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = M^2$ et $g(M) = AM$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
On note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
L'application f est étudiée dans les questions 1 à 3, l'application g est étudiée dans la question 4.

1. (a) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $f(B)$.
   (b) Etudier l'injectivité de f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = D$.
   (a) Montrer que M et D commutent.
   (b) En déduire des conditions sur les coefficients de M dans le cas où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Etudier la surjectivité de f de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. On note $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $f(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) \subset \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. A-t-on l'égalité ?
   (b) Montrer que $\mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \subset f^{-1}\left(\mathscr{D}_2(\mathbb{R})\right)$. A-t-on l'égalité ?
4. (a) Montrer que la matrice A est inversible.
   (b) Montrer que g est bijective de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser son application réciproque.

EXERCICE 9

Résoudre les systèmes suivants (les inconnues étant des nombres réels) :

- (S_1) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x+2y=1 \\ 3x+5y=5 \end{cases}$
- (S_2) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=1 \\ -x+5y=2 \end{cases}$
- (S_3) $\begin{cases} -x-4y+6z=22 \\ 3x+2y-2z=-4 \\ 2x-y-3z=1 \end{cases}$
- (S_4) $\begin{cases} x-4y+2z=-2 \\ 3x-y+6z=-\frac{1}{2} \\ -2x+2y-3z=\frac{5}{2} \end{cases}$
- (S_5) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ -3x+2y-z=0 \\ x-3y-2z=0 \end{cases}$
- (S_6) $\begin{cases} 3x+2z=1 \\ 3y+z=-2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$
- (S_7) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ x+2y-3z=2 \end{cases}$
- (S_8) $\begin{cases} x-y+2z=-x \\ 2x+y+2z=2y \\ -6x+3y-3z=3z \end{cases}$
- (S_9) $\begin{cases} x+y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases}$
- (S_{10}) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y-z=11 \\ 2x+5y-5z=13 \\ x+4y+z=18 \end{cases}$

EXERCICE 10

L'espace est muni d'un repère.

1. Résoudre le système suivant en fonction de la valeur du paramètre $a, a \in \mathbb{R}$, et donner une interprétation géométrique des solutions.

   $$(S_1) \quad \begin{cases} 1x + 1y - 1z = 2 \\ 1x + (a+1)y + 1z = 6 \\ -1x + (a-1)y + (a+1)z = a^2-2 \end{cases}$$

   $$(S_2) \quad \begin{cases} 1x + ay + 1z = a \\ ax + 1y + 1z = a \\ 1x + 1y + az = a^2 \end{cases}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   On considère les plans $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ d'équations respectives
   $x+y+az=1-a^2, x+ay+z=a-a^2$ et $-ax+(1-2a)y-z=(1-a)^2$.
   Etudier la nature de l'intersection des trois plans $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ en fonction de la valeur du paramètre a.

EXERCICE 11

Soit $(x_n), (y_n)$ et (z_n) trois suites réelles définies par leurs premiers termes $x_0=1, y_0=2$ et $z_0=-1$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}.$$

On considère la matrice $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Vérifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n puis A^n.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
   En déduire le terme général des suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) et étudier leur limite.