TD 4 : Nombres réels, nombres complexes

Éléments de correction

Exercice 3

Démontrer l'inégalité "classique" : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 \geq 0$ donc $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

On a également $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)^2 \geq 0$ donc $-ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

D'où $-\dfrac{a^2+b^2}{2} \leqslant ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Ainsi $\boxed{|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2} \text{ pour tous réels } a \text{ et } b.}$

Exercice 4

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$.

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x+y$. Donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x+y$.

   $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x+y$ donc $\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor}$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}, \lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{Z}$.

   $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + \alpha \leq x + \alpha < (\lfloor x \rfloor + \alpha) + 1$.

   $\lfloor x \rfloor + \alpha$ est un entier relatif donc $\boxed{\lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha}$.

Exercice 7

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 = n^2+n+\dfrac{1}{4}$.

   $\dfrac{1}{4} < 1$ donc $n^2+n+\dfrac{1}{4} < n^2+n+1$. Alors $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 < n^2+n+1$.

   De plus, $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $2n > n$ et donc $n^2+2n+1 > n^2+n+1$. On en déduit que $(n+1)^2 > n^2+n+1$.

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2}$.

2. Montrer que $\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor$ est un nombre impair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*, 0 < \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$ donc par croissante sur de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, $n+\dfrac{1}{2} < \sqrt{n^2+n+1} < n+1$.

   Alors $2n+1 < 2\sqrt{n^2+n+1} < 2n+2$ et donc $\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor = 2n+1$.

   Ainsi $\boxed{\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor \text{ est un nombre impair pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

Exercice 10

5. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = i\tan\dfrac{\theta}{2}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \backslash \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Ainsi $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = i\tan\dfrac{\theta}{2}}$.

Exercice 11

1. Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ et $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$.

   Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
   $$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib}\\ &=(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)\\ &=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+i(\cos a\sin b+\sin a\cos b)\end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\cos(a+b)=\mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)}\right)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}$ et

   $\boxed{\sin(a+b)=\mathrm{Im}\left(e^{i(a+b)}\right)=\cos a\sin b+\sin a\cos b}$.

2. Montrer que $\forall (a,b,t)\in\mathbb{R}^3, \exists (A,\phi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} / a\cos t+b\sin t=A\cos(t-\phi)$.

   Soit $(a,b,t)\in\mathbb{R}^3$.

   Analyse : On suppose qu'il existe $A>0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$ tels que $a\cos t+b\sin t=A\cos(t-\phi)$.
   Puisque $\cos(t-\varphi)=\cos t\cos\varphi+\sin t\sin\varphi$. alors par identification, $a=A\cos\varphi$ et $b=A\sin\varphi$.

   Synthèse : Posons $A=\sqrt{a^2+b^2}$.
   Cas 1 : Si $a=b=0$, alors $A=0$, et $a\cos t+b\sin t=0=A\cos(t-\varphi)$, quel que soit φ. Le résultat est donc valable.
   Cas 2 : Si $(a,b)\neq(0,0)$, alors $A>0$. On peut donc définir $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que : $\cos\varphi=\dfrac{a}{A}$ et $\sin\varphi=\dfrac{b}{A}$.
   On a alors $A\cos(t-\varphi)=A\cos t\cos\varphi+A\sin t\sin\varphi=a\cos t+b\sin t$.

   Ainsi, $\boxed{\forall (a,b,t)\in\mathbb{R}^3, \exists (A,\phi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} / a\cos t+b\sin t=A\cos(t-\phi)}$.

Exercice 14

Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z non nul, associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=-\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   Soit $z\in\mathbb{C}^*, f(z)=z \iff -\dfrac{1}{\overline{z}}=z\iff z\overline{z}=-1\iff |z|^2=-1$.

   Or $|z|^2$ est un réel positif donc l'équation $f(z)=z$ n'a pas de solution.

   Donc $\boxed{\text{l'ensemble des points invariants par } f \text{ est l'ensemble vide}}$.

2. Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}^*, \overline{z'+1}=\dfrac{z-1}{z}$ puis que $\forall z\in\mathbb{C}^*, |z'+1|=|z'|\iff |z-1|=1$.

   Soit $z\in\mathbb{C}^*, \overline{z'+1}=-\overline{\dfrac{1}{\overline{z}}}+1=-\dfrac{1}{z}+1=\dfrac{z-1}{z}$.

   Soit $z\in\mathbb{C}^*$.
   $$\begin{aligned} |z'+1|=|z'| &\iff |\overline{z'+1}|=|z'|\\ &\iff \left|\frac{z-1}{z}\right|=\left|-\frac{1}{\overline{z}}\right|\\ &\iff \frac{|z-1|}{|z|}=\frac{1}{|\overline{z}|}\\ &\iff \frac{|z-1|}{|z|}=\frac{1}{|z|}\\ &\iff |z-1|=1\end{aligned}.$$

   Donc $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}^*, \overline{z'+1}=\dfrac{z-1}{z} \text{ et } \forall z\in\mathbb{C}^*, |z'+1|=|z'|\iff |z-1|=1}$

3. Soit M un point d'affixe z non nul et M' d'affixe z' son image par f.

   (a) Etablir une relation entre OM et OM'.

   $z'=-\dfrac{1}{\overline{z}}$ donc $OM'=|z'|=\left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right|=\dfrac{1}{|\overline{z}|}=\dfrac{1}{|z|}=\dfrac{1}{OM}$.

   Donc $\boxed{OM'=\dfrac{1}{OM}}$.

(b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et en donner une interprétation géométrique.

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi] \iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg\left(-\frac{1}{z\bar{z}}\right)[2\pi]$$

$$\iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg\left(-\frac{1}{|z|^2}\right)[2\pi]$$

$$\iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \pi[2\pi]$$

Donc $\boxed{\text{les points } O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés avec } O \in [MM']}$.

4. Soit A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1. Construire l'image M' par f d'un point M quelconque, distinct de O, appartenant à $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} \setminus \{O\} &\iff \begin{cases} M & \neq & O \\ AM & = & 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z & \in & \mathbb{C}^* \\ |z-1| & = & 1 \end{cases} \\ &\iff |z'+1| = |z'| \\ &\iff BM' = OM' \quad \text{avec} \quad B \quad \text{le} \quad \text{point} \quad \text{d'affixe} \quad -1. \end{aligned}$$

Donc M' appartient à la médiatrice du segment $[BO]$.
Les points O, M et M' sont alignés avec $M' \in [MO)$.

Ainsi $\boxed{M' \text{est le point d'intersection de la médiatrice du segment } [BO]}$ $\boxed{\text{et de } [MO)}$.

Faire une figure en plaçant M où vous voulez!