TD 4 : Nombres réels, nombres complexes

OBJECTIFS :

- AN 7-1 : Maîtriser les automatismes relatifs aux inégalités et à la valeur absolue.
- AN 7-2 : Montrer qu'une partie est majorée (minorée) ou non, qu'elle admet un maximum (un minimum) ou non.
- AN 7-3 : Connaître la définition de la partie entière d'un nombre réel et savoir l'utiliser.
- AN 7-4 : Savoir démontrer des inégalités comportant des intégrales.
- AL 8-1, AL 8-2 : Manipuler les formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe.
- G 8-3 : Déterminer des ensembles de points dans le plan complexe.
- G 8-3 : Résoudre des problèmes en utilisant les propriétés des arguments.
- G 8-3 : Résoudre des problèmes géométriques faisant intervenir les transformations usuelles.

Nombres réels

Exercice 1

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.

Exercice 2

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

1. $x - 1 = \sqrt{x+2}$
2. $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x-3} < 0$
3. $|3 - x| = x + 1$
4. $|x+4| \leqslant |2x+1|$

Exercice 3

Démontrer l'inégalité "classique" : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Exercice 4

Les ensembles suivants sont-ils majorés ? minorés ? bornés ? Admettent-ils un maximum ? un minimum ?

1. $\{x \in \mathbb{R}, |x+1| \geqslant 3\}$
2. $\{x - \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 5

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}, \lfloor x + \alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $\lfloor kx \rfloor$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$.

Exercice 7

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$.
2. Montrer que $\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor$ est un nombre impair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 8

Les 7. questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\mathrm{d}x \leq 1$.

2. Montrer que $\forall a \in \left]0;+\infty\right[, \displaystyle\int_0^{100} \left|e^{-ax}\cos x\right| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{a}$.

3. Montrer que $\forall a \in \left]0;+\infty\right[, \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-ax}}{1+x} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{a}$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}$.

5. (a) Montrer que $\forall x \in]-1;+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{3}$.

6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{100} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{e} + 1élémet$.

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}(1-x)^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{e}{3}$.

Nombres complexes

EXERCICE 9

Les questions sont indépendantes.

1. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :
   $z_1 = (1-i\sqrt{2})^2, z_2 = \dfrac{1+5i}{1-4i}, z_3 = \dfrac{1+i}{1-i}, z_4 = \dfrac{1-2i}{1+5i} + \dfrac{1+2i}{1-5i},$
   $z_5 = (2-i)^3 + (2+i)^3$ et $z_6 = \dfrac{-2}{1+i\sqrt{5}}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer, en fonction de $Re(z)$ et/ou $Im(z)$, les quantités suivantes : $Re(iz)$, $Im(iz)$, $Re(z^2)$, $Im(z^2)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   (a) $(2i-1)z + 4 - i = z$

   (b) $2z + (3+i)\overline{z} = 4 - i$

   (c) $iz^2 = 2z$

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

   (a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$ soit un imaginaire pur.

   (b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ tels que $Z = \dfrac{z-2}{z+i}$ soit un réel.

EXERCICE 10

Les questions sont indépendantes.

1. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :
   $z_1 = -3i, z_2 = 1+i, z_3 = 1-i\sqrt{3}, z_4 = -4+4i, z_5 = -7, z_6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i},$
   $z_7 = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_8 = \dfrac{1}{(1+i\sqrt{3})^4}$.

2. Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

   (a) $z = 1 + i\tan\theta, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ puis $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

   (b) $z = 1 + e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.

3. Soit $(z,u) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Montrer que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (u \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R})$.

4. Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbb{U}^2, zz' \neq -1 \Longrightarrow \dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = i\tan\dfrac{\theta}{2}$.

EXERCICE 11

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
2. Montrer que $\forall (a,b,t) \in \mathbb{R}^3, \exists (A,\phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} / a\cos t + b \sin t = A\cos(t-\phi)$.

Pour les exercices 12 *à* 16*, le plan est muni d'un repère orthonormal direct* $(O;\vec{u},\vec{v})$.

EXERCICE 12

Les questions sont indépendantes.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3i$ et $z_B = -1$.
Soit f l'application, qui à tout point M d'affixe $z, z \neq z_B$, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{iz+3}{z+1}$.

1. Exprimer le module de z' en fonction de AM et BM puis un argument de z' en fonction de $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixe z tels que z' soit un réel strictement positif.

EXERCICE 13

1. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|iz-3| = 1$.
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|\overline{z} - 3 + i| = |z-5|$.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points A d'affixe i, M et N d'affixe iz soient alignés.
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 forment un triangle rectangle en P.

EXERCICE 14

Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z non nul, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{z'+1} = \dfrac{z-1}{z}$ puis que $\forall z \in \mathbb{C}^*, |z'+1| = |z'| \Longleftrightarrow |z-1| = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z non nul et M' d'affixe z' son image par f.
   (a) Etablir une relation entre OM et OM'.
   (b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et en donner une interprétation géométrique.
4. Soit A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1. Construire l'image M' par f d'un point M quelconque, distinct de O, appartenant à $\mathscr{C}$.

EXERCICE 15

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1, -1-2i$ et i.
soit $z \in \mathbb{C}$. Soit M le point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par une transformation.

1. On considère la transformation T d'écriture complexe $z' = iz - 2 + i$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
2. On considère la transformation laissant le point A invariant et transformant C en B.
   On admet que cette transformation T' a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.
   Déterminer l'écriture complexe de T' et montrer que T' est la composée de deux transformations simples.

EXERCICE 16

On considère $A(-1+i)$ et $B(1+4i)$.

1. Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Déterminer l'écriture complexe de R.
   (b) Déterminer l'affixe du point C, image du point B par la rotation R.
2. On pose $\vec{w} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Soit D l'image du point C par la translation t de vecteur $\vec{w}$. Déterminer l'affixe du point D.
3. On considère la transformation T d'écriture complexe $z' = \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}i$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
4. On note E l'image du point C par la transformation T.
   Montrer que les points A, D et E sont alignés.