

TD 5 : Fonctions usuelles (partie 1)



OBJECTIFS :

- AN 9-1, AN 9-2 : Démontrer et exploiter les propriétés d'une fonction (parité, périodicité).
- AN 9-3 : Calculer les limites d'une fonction et en donner une interprétation graphique.
- AN 9-4 : Utiliser la dérivabilité pour calculer des limites.
- AN 9-5 : Étudier les branches infinies d'une courbe.
- AN 9-6, AN 9-7 : Etudier la bijectivité d'une fonction et déterminer sa fonction réciproque.
- AN 9-8 : Etudier la dérivabilité d'une fonction réciproque et calculer sa dérivée.
- AN 9-9 : Connaître parfaitement les définitions des fonctions usuelles et leurs propriétés (ensemble de définition, parité, dérivée, sens de variation, limites, allure de la courbe, propriétés de calculs).
- AN 9-10 : Résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des fonctions usuelles.
- AN 9-11 : Etudier une fonction faisant intervenir des fonctions usuelles.
- AN 9-12 : Simplifier une expression formée à partir de fonctions usuelles.
- AN 9-13 : Démontrer une inégalité faisant intervenir des fonctions usuelles.

EXERCICE 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
 - (a) On suppose que f et g sont paires.
Que peut-on dire de la parité de $f + g$, de $f \times g$ et de $f \circ g$?
 - (b) On suppose que f et g sont impaires.
Que peut-on dire de la parité de $f + g$, de $f \times g$ et de $f \circ g$?
2. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer son ensemble de définition puis étudier sa parité.

(a) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$

(b) $f : x \mapsto x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$

(c) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(d) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

EXERCICE 2

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(2x) + \sin(4x)$ est périodique.
2. Montrer que la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, d(x) = \lfloor x \rfloor - x$ est périodique.
3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(a+x) = -f(x)$. Montrer que f est $2a$ -périodique.

EXERCICE 3

Calculer les limites suivantes, si elles existent :

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (\ln x)(\ln(\ln x))$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ |
| 2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ | 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \ln x}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch}(x)}{x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\operatorname{ch}(x) + x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right)$ | 13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2 \cos x}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor}$ | 14. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{\ln x}$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1}$ | |

EXERCICE 4

Etudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

- f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2 - e^x$.
- f définie sur $] -\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ par $\forall x \in] -\infty; -2] \cup [0; +\infty[$,
 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$.
- f définie sur $]0; +\infty[$ par $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{2x^2 - 3x \ln x}{x + 1}$.

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection de I dans J , J ensemble à déterminer, puis préciser f^{-1} .

- f définie sur $I = [2; +\infty[$ par $\forall x \in [2; +\infty[, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
- f définie sur $I = [1; +\infty[$ par $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

- Etudier la parité de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en donner une interprétation graphique.
- Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
- Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.
- On pose $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de $u(x)$ et $v(x)$.
En déduire une expression de f' en fonction de f .
- Sans calculer f^{-1} , justifier que f^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(f^{-1})'$.
- Déterminer l'expression de f^{-1} .

EXERCICE 7

Les questions sont indépendantes.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
 - $2^{x+1} + 4^x = 15$
 - $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression $\frac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
- Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, \operatorname{sh} x \geq x$, puis que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

EXERCICE 8

- Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
On note $Argsh$ son application réciproque.
- Le but de cette question est de déterminer la dérivabilité de la fonction $Argsh$ sans déterminer son expression.
 - Montrer que $\forall y \in I, ch(Argsh y) = \sqrt{1 + y^2}$.
 - Justifier que $Argsh$ est dérivable sur un intervalle J à préciser et déterminer l'expression de sa fonction dérivée.
- Montrer que $\forall y \in I, y - \sqrt{1 + y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1 + y^2} > 0$.
 - Déterminer l'expression de $Argsh$.

EXERCICE 9

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur l'intervalle I :

- $\sin(2x) \geq \sin x$ et $I = [-\pi; \pi]$
- $\sqrt{3} \cos x - \sin x = -\sqrt{3}$ et $I = \mathbb{R}$
- $2 \sin x \tan x + 4 \cos x = 5$ et $I = \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$
- $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} = 0$ et $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 10

On note $\tan$, la fonction tangente $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

- Justifier que la fonction $\tan$ est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Etudier la parité et la périodicité de la fonction $\tan$ et en déduire qu'on peut l'étudier sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$.
- Justifier que la fonction $\tan$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ et calculer sa dérivée.
 - Etudier son sens de variation.

(c) Calculer les limites de la fonction $\tan$ aux bornes de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et en donner une interprétation graphique.

- Tracer la courbe représentative de la fonction $\tan$.

EXERCICE 11

- Montrer que $\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan x > x$.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ est bijective de l'intervalle $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ dans un intervalle que l'on précisera.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \cos(x) - \cos(2x)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que f est 2π -périodique.
Quelle conséquence graphique peut-on en tirer?
 - Etudier la parité de f .
Quelle conséquence graphique peut-on en tirer?
 - Sur quel intervalle peut-on restreindre l'étude de f ?
- Calculer la dérivée de la fonction f et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \sin x (2 \cos x - 1)$.
 - Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0; \pi]$ et dresser son tableau de variation sur une période.
- Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur une période.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. (a) Montrer que f est périodique de période π puis que $A\left(\frac{3\pi}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

Définition :

Soit f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que le point $A(a; b)$ est **centre de symétrie** de la courbe $\mathcal{C}$ si $\forall h \in \mathbb{R} / a - h \in \mathcal{D}$ et $a + h \in \mathcal{D}$, $f(a - h) + f(a + h) = 2b$.
- On dit que la droite d'équation $x = a$ est **axe de symétrie** de la courbe $\mathcal{C}$ si $\forall h \in \mathbb{R} / a - h \in \mathcal{D}$ et $a + h \in \mathcal{D}$, $f(a - h) = f(a + h)$.

- (b) En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de f à l'intervalle $I = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$.
3. (a) Etudier les variations de f sur I et calculer sa limite en $\frac{\pi}{4}$.
(b) Dresser son tableau de variation sur une période.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A .
5. Tracer $\mathcal{C}$ sur un intervalle d'amplitude π .