

EXERCICE 2

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(a+x) = -f(x)$. Montrer que f est $2a$ -périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x+2a \in \mathbb{R}$.

De plus, $f(x+2a) = f(a+(x+a)) = -f(x+a) = -(-f(x)) = f(x)$.

Donc f est $2a$ -périodique.

EXERCICE 3

Calculer les limites suivantes, si elles existent :

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{ch(x) + x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{ch(x) + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1 + e^{-2x}}{2} + \frac{x}{e^x}} = 2$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{ch(x) + x} = 2$.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - ch(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - ch(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{ch(x) - ch(0)}{x - 0} = -ch'(0) \text{ car la fonction } ch \text{ est dérivable}$$

en 0. Or $ch'(0) = sh(0) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - ch(x)}{x} = 0$.

14. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{x(1 + \frac{1}{x}) \times \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{(x+1) \times \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{1 + \frac{1}{x}}}$$

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + 1 = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc par produit et

composée, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{(x+1) \times \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{1 + \frac{1}{x}}} = e$. D'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\ln x}$

En posant $X = \ln x$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\ln x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-e^X}-1}{X}$.

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-e^X}-1}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-e^X}-\sqrt{2-e^0}}{X-0} = \frac{-e^0}{2\sqrt{2-e^0}} \text{ (car la fonction}$$

$x \mapsto \sqrt{2-e^x}$ est dérivable en 0).

Or $\frac{-e^0}{2\sqrt{2-e^0}} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\ln x} = -\frac{1}{2}$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Etudier la parité de f .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$.

$$\text{De plus, } f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x).$$

Ainsi f est impaire.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en donner une interprétation graphique.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

De plus, f est impaire donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

Ainsi les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$ sont asymptotes horizontales à la courbe représentative de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. **Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	-1	1

4. **Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.**

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]-1; 1[$.

5. **Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de $u(x)$ et $v(x)$.**

En déduire une expression de f' en fonction de f .

$$e^x = \frac{v(x) + u(x)}{2} \text{ et } 1 = \frac{v(x) - u(x)}{2}.$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(v(x) - u(x))(v(x) + u(x))}{2v(x)^2} = \frac{v(x)^2 - u(x)^2}{2v(x)^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} (1 - (f(x))^2).$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} (1 - (f(x))^2).$$

6. **Sans calculer f^{-1} , justifier que f^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(f^{-1})'$.**
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc la réciproque f^{-1} est dérivable sur $] -1; 1[$.

$$\text{Soit } y \in] -1, 1[, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{2}{1 - (f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{2}{1 - y^2}.$$

$$\text{Donc } \forall y \in] -1, 1[, (f^{-1})'(y) = \frac{2}{1 - y^2}.$$

7. **Déterminer l'expression de f^{-1} .**

1ère méthode :

$$\forall y \in] -1, 1[, (f^{-1})'(y) = \frac{2}{1 - y^2} = \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{1 + y}.$$

$$\text{Donc } \exists C \in \mathbb{R} / \forall y \in] -1, 1[, f^{-1}(y) = -\ln(1 - y) + \ln(1 + y) + C = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) + C.$$

Or $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$. De plus, $f^{-1}(0) = 0 \iff C = 0$ donc

$$\forall y \in] -1; 1[, f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right).$$

2ème méthode :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times] -1; 1[$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \\ &\iff e^x - 1 = y(e^x + 1) \\ &\iff e^x(1 - y) = y + 1 \\ &\iff e^x = \frac{1 + y}{1 - y} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \text{ car } y \in] -1; 1[\text{ donc } 1 - y \neq 0 \text{ et } \frac{1 + y}{1 - y} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall y \in] -1; 1[, f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right).$$

EXERCICE 8

1. Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.

La fonction sh , définie par $\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (montré en classe!) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $sh(\mathbb{R})$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty$ donc

sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $Argsh$ son application réciproque.

2. Le but de cette question est de déterminer la dérivabilité de la fonction $Argsh$ sans déterminer son expression.

- (a) Montrer que $\forall y \in I, ch(Argshy) = \sqrt{1+y^2}$.

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

Soit $y \in \mathbb{R}, ch^2(Argshy) - sh^2(Argshy) = 1$.

Alors $ch^2(Argshy) = 1 + sh^2(Argshy) = 1 + y^2$.

Or $1 + y^2 > 0$ donc $ch(Argshy) = \pm \sqrt{1+y^2}$.

De plus, la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $ch(Argshy) > 0$.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, ch(Argshy) = \sqrt{1+y^2}$.

- (b) Justifier que $Argsh$ est dérivable sur un intervalle J à préciser et déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, ch , ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $Argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}, Argsh'(y) = \frac{1}{sh'(Argshy)} = \frac{1}{ch(Argshy)} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, Argsh'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

3. (a) Montrer que $\forall y \in I, y - \sqrt{1+y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1+y^2} > 0$.

Soit $y \in \mathbb{R}, 1 + y^2 > y^2$ et la fonction racine carrée est strictement

croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\sqrt{1+y^2} > |y|$. De plus, $|y| \geq y$ donc $\sqrt{1+y^2} > y$. D'où $y - \sqrt{1+y^2} < 0$.

On a également $|y| \geq -y$ donc $\sqrt{1+y^2} > -y$. D'où $y + \sqrt{1+y^2} > 0$.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, y - \sqrt{1+y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1+y^2} > 0$.

- (b) Déterminer l'expression de $Argsh$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} sh(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\iff e^x - e^{-x} = 2y \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\iff (e^x - y)^2 - y^2 - 1 = 0 \\ &\iff (e^x - y)^2 = 1 + y^2 \\ &\iff e^x - y = \sqrt{1+y^2} \quad \text{ou} \quad e^x - y = -\sqrt{1+y^2} \\ &\iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \quad \text{ou} \quad e^x = y - \sqrt{1+y^2} \end{aligned}$$

Or $y - \sqrt{1+y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1+y^2} > 0$ donc

$$sh(x) = y \iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \iff x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, Argshy = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

EXERCICE 10

On note $\tan$, la fonction tangente $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Justifier que la fonction $\tan$ est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} / \cos x \neq 0\} \text{ donc } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Etudier la parité et la périodicité de la fonction tan et en déduire qu'on peut l'étudier sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $x \in \mathcal{D}$.

• **Parité :**

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff -x \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -x \neq -\frac{\pi}{2} + \pi - \pi - k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -x \neq \frac{\pi}{2} - (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -x \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \\ &\iff -x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$.

De plus, cos est paire et sin est impaire donc

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

Ainsi la fonction tangente est impaire.

• **Périodicité :**

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathcal{D}, x + \pi \in \mathcal{D}$.

$$\text{De plus, } \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

Ainsi la fonction tangente est π -périodique.

- La fonction tangente est π -périodique donc on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude π (et centré en 0 pour utiliser ensuite la parité) : par exemple sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, la fonction tangente est impaire donc on peut l'étudier sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi on peut étudier la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. (a) Justifier que la fonction tan est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa dérivée.

La fonction tangente est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{Soit } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

 Remarque :

$$\text{On a aussi } \tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

(b) Etudier son sens de variation.

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos^2 x > 0 \text{ donc } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \tan'(x) > 0.$$

Alors la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, elle est impaire donc elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.

Ainsi la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

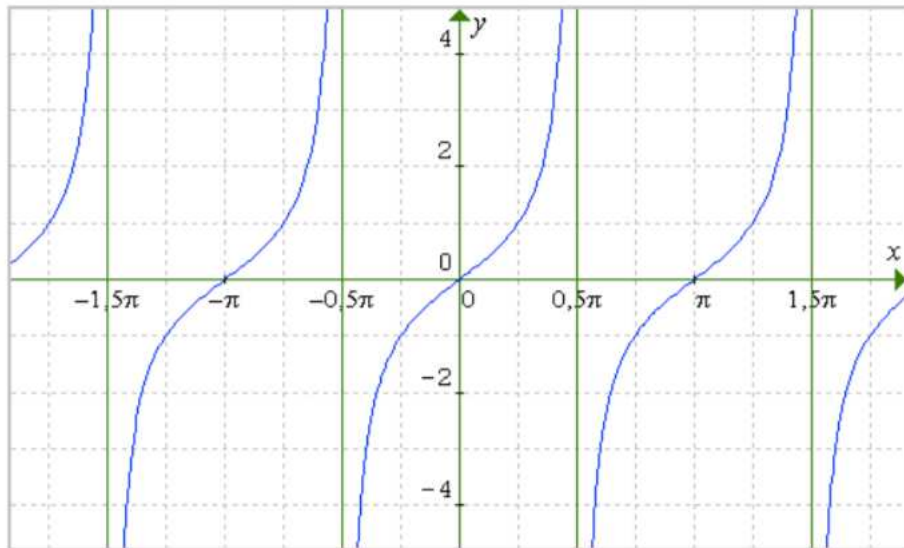
- (c) Calculer les limites de la fonction tan aux bornes de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et en donner une interprétation graphique.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0^+ \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty.$$

De plus, la fonction tangente est impaire donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty.$

Ainsi les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ sont asymptotes verticales à la courbe représentative de la fonction tangente.

4. Tracer la courbe représentative de la fonction tan.



EXERCICE 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

On appelle $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in \mathcal{D} \iff \sin x - \cos x \neq 0 \iff \sin x \neq \cos x \iff x \neq \frac{\pi}{4}[\pi].$$

Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

2. (a) Montrer que f est périodique de période π puis que $A\left(\frac{3\pi}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

Soit $x \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{4} + k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{4} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ainsi $x + \pi \in \mathcal{D}$.

$$f(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi) - \cos(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x + \cos x} = f(x).$$

Donc f est périodique de période π .

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{3\pi}{4} + h \in \mathcal{D}$ et $\frac{3\pi}{4} - h \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{4} + h \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\iff h \neq \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff h \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff h \neq -\pi + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff h \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3\pi}{4} - h \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\iff -h \neq \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\iff -h \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\iff h \neq \frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\iff h \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{h \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}}.$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{3\pi}{4} - h\right) &= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - h\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - h\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - h\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos h + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin h}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos h - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin h - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos h - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin h} \\
&= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos h + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin h}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos h + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin h + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos h - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin h} \\
&= \frac{-\cos h + \sin h}{2\cos h}
\end{aligned}$$

De plus,

$$f\left(\frac{3\pi}{4} + h\right) = f\left(\frac{3\pi}{4} - (-h)\right) = \frac{-\cos(-h) + \sin(-h)}{2\cos(-h)} = \frac{-\cos(h) - \sin(h)}{2\cos(h)}.$$

Donc $f\left(\frac{3\pi}{4} + h\right) + f\left(\frac{3\pi}{4} - h\right) = -1 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right).$

Ainsi $\boxed{A\left(\frac{3\pi}{4}; -\frac{1}{2}\right)}$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

- (b) En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de f à l'intervalle $I = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$.

f est π -périodique donc on peut étudier f sur un intervalle de longueur π .

De plus, A est centre de symétrie de $\mathcal{C}$ donc on prend un intervalle centré en $\frac{3\pi}{4}$: par exemple sur $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right[$ et l'étude sur $I = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$ suffit.

3. (a) Etudier les variations de f sur I et calculer sa limite en $\frac{\pi}{4}$.

La fonction f est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I et dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\sin x(\sin x - \cos x) - \cos x(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}
\end{aligned}$$

$\forall x \in I, f'(x) < 0$ donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } I}.$

Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} f(x)$. Pour cela, écrivons autrement $f(x)$ pour tout $x \in I$.

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cos x}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)} \\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \sin X = 0^+$ donc

par composée, $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0^+.$

Ainsi par quotient, $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} f(x) = +\infty}.$

Remarque :

La droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

(b) Dresser son tableau de variation sur une période.

A est centre de symétrie de $\mathcal{C}$ et f est strictement décroissante sur I donc f est strictement décroissante sur $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right[$.

On obtient donc le tableau de variations de f :

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
Variations de f	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$

(c) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A .

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \text{ et } f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \text{ donc}$$

$$\text{la tangente à } \mathcal{C} \text{ en } A \text{ a pour équation } y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}.$$