TD 5 : Fonctions usuelles (partie 1) et trigonométrie

Elements de correction

EXERCICE 2

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(a+x) = -f(x)$. Montrer que f est $2a$−périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x + 2a \in \mathbb{R}$.
De plus, $f(x+2a) = f(a+(x+a)) = -f(x+a) = -(-f(x)) = f(x)$.
Donc $\boxed{f \text{ est } 2a\text{−périodique}}$.

EXERCICE 3

Calculer les limites suivantes, si elles existent :

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{ch(x)+x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{ch(x)+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1+e^{-2x}}{2}+\frac{x}{e^x}} = 2$$

car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{ch(x)+x} = 2}$.

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-ch(x)}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-ch(x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{ch(x)-ch(0)}{x-0} = ch'(0)$ car la fonction ch est dérivable en 0. Or $ch'(0) = sh(0) = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-ch(x)}{x} = 0}$.

14. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{(x+1)\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}}.$$

Or $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x+1 = 1$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc par produit et composée, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{(x+1)\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}} = e$. D'où $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$.

15. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\ln x}$

En posant $X = \ln x$, on obient : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\ln x} = \lim_{X\to 0} \frac{\sqrt{2-e^X}-1}{X}$.

$\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\sqrt{2-e^X}-1}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{\sqrt{2-e^X}-\sqrt{2-e^0}}{X-0} = \frac{-e^0}{2\sqrt{2-e^0}}$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt{2-e^x}$ est dérivable en 0).

Or $\displaystyle\frac{-e^0}{2\sqrt{2-e^0}} = -\frac{1}{2}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\ln x} = -\frac{1}{2}}$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Etudier la parité de f.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$.
   De plus, $f(-x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = -\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en donner une interprétation graphique.

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

   Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

De plus, f est impaire donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1}$.

Ainsi $\boxed{\text{les droites d'équation } y = -1 \text{ et } y = 1 \text{ sont asymptotes horizontales}}$ $\boxed{\text{à la courbe représentative de } f \text{ en } -\infty \text{ et } +\infty}$.

3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

   Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	-1 $\nearrow$	1

4. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.

   f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } f(\mathbb{R}) =]-1;1[}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de $u(x)$ et $v(x)$.

   En déduire une expression de f' en fonction de f.

   $\boxed{e^x = \dfrac{v(x)+u(x)}{2} \text{ et } 1 = \dfrac{v(x)-u(x)}{2}}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(v(x)-u(x))(v(x)+u(x))}{2v(x)^2} = \dfrac{v(x)^2-u(x)^2}{2v(x)^2} = \dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)^2\right) = \dfrac{1}{2}(1-(f(x))^2)$.

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{2}(1-(f(x))^2)}$.

6. Sans calculer f^{-1}, justifier que f^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(f^{-1})'$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{la réciproque } f^{-1} \text{ est dérivable sur }]-1;1[}$.

   Soit $y \in]-1,1[$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{2}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \dfrac{2}{1-y^2}$.

   Donc $\boxed{\forall y \in]-1,1[, (f^{-1})'(y) = \dfrac{2}{1-y^2}}$.

7. Déterminer l'expression de f^{-1}.

   1ère méthode :

   $\forall y \in]-1,1[, (f^{-1})'(y) = \dfrac{2}{1-y^2} = \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{1+y}$.

   Donc $\exists C \in \mathbb{R} / \forall y \in]-1,1[, f^{-1}(y) = -\ln(1-y) + \ln(1+y) + C = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) + C$.

   Or $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$. De plus, $f^{-1}(0) = 0 \iff C = 0$ donc $\boxed{\forall y \in]-1;1[, f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)}$.

   2ème méthode :

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times]-1;1[$.

$$
\begin{aligned}
f(x) = y &\iff \frac{e^x-1}{e^x+1} = y \\
&\iff e^x - 1 = y(e^x+1) \\
&\iff e^x(1-y) = y+1 \\
&\iff e^x = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \text{ car } y \in]-1;1[\text{ donc } 1-y \neq 0 \text{ et } \frac{1+y}{1-y} > 0
\end{aligned}
$$

   Donc $\boxed{\forall y \in]-1;1[, f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)}$.

EXERCICE 8

1. Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.

   La fonction sh, définie par $\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (montré en classe!) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $sh(\mathbb{R})$.

   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$ donc

   $\boxed{sh \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

   On note $Argsh$ son application réciproque.

2. Le but de cette question est de déterminer la dérivabilité de la fonction $Argsh$ sans déterminer son expression.

   (a) Montrer que $\forall y \in I, ch(Argsh y) = \sqrt{1+y^2}$.

   Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

   Soit $y \in \mathbb{R}, ch^2(Argsh y) - sh^2(Argsh y) = 1$.

   Alors $ch^2(Argsh y) = 1 + sh^2(Argsh y) = 1 + y^2$.

   Or $1 + y^2 > 0$ donc $ch(Argsh y) = \pm\sqrt{1+y^2}$.

   De plus, la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $ch(Argsh y) > 0$.

   Ainsi $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, ch(Argsh y) = \sqrt{1+y^2}}$.

   (b) Justifier que $Argsh$ est dérivable sur un intervalle J à préciser et déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

   La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, ch, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $Argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Soit $y \in \mathbb{R}, Argsh'(y) = \dfrac{1}{sh'(Argsh y)} = \dfrac{1}{ch(Argsh y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

   Ainsi $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, Argsh'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}}$.

3. (a) Montrer que $\forall y \in I, y - \sqrt{1+y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1+y^2} > 0$.

   Soit $y \in \mathbb{R}, 1 + y^2 > y^2$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\sqrt{1+y^2} > |y|$. De plus, $|y| \geq y$ donc $\sqrt{1+y^2} > y$. D'où $y - \sqrt{1+y^2} < 0$.

   On a également $|y| \geq -y$ donc $\sqrt{1+y^2} > -y$. D'où $y + \sqrt{1+y^2} > 0$.

   Ainsi $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, y - \sqrt{1+y^2} < 0 \text{ et } y + \sqrt{1+y^2} > 0.}$

   (b) Déterminer l'expression de $Argsh$.

   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
sh(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\
&\iff e^x - e^{-x} = 2y \\
&\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\
&\iff (e^x - y)^2 - y^2 - 1 = 0 \\
&\iff (e^x - y)^2 = 1 + y^2 \\
&\iff e^x - y = \sqrt{1+y^2} \quad \text{ou} \quad e^x - y = -\sqrt{1+y^2} \\
&\iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \quad \text{ou} \quad e^x = y - \sqrt{1+y^2}
\end{aligned}$$

   Or $y - \sqrt{1+y^2} < 0$ et $y + \sqrt{1+y^2} > 0$ donc

   $sh(x) = y \iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

   Ainsi $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, Argsh y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)}$.

EXERCICE 10

On note tan, la fonction tangente $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Justifier que la fonction tan est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

   $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} / \cos x \neq 0\}$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Etudier la parité et la périodicité de la fonction tan et en déduire qu'on peut l'étudier sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $x\in\mathscr{D}$.

- **Parité :**

$$\begin{aligned} x\in\mathscr{D} &\iff x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \\ &\iff -x\neq-\frac{\pi}{2}-k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ &\iff -x\neq-\frac{\pi}{2}+\pi-\pi-k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ &\iff -x\neq\frac{\pi}{2}-(k+1)\pi, k\in\mathbb{Z} \\ &\iff -x\neq\frac{\pi}{2}+k'\pi, k'\in\mathbb{Z} \\ &\iff -x\in\mathscr{D} \end{aligned}.$$

Donc $\forall x\in\mathscr{D}, -x\in\mathscr{D}$.

De plus, cos est paire et sin est impaire donc

$\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.

Ainsi $\boxed{\text{la fonction tangente est impaire}}$.

- **Périodicité :**

$$\begin{aligned} x\in\mathscr{D} &\iff x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \\ &\iff x+\pi\neq\frac{\pi}{2}+\pi+k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ &\iff x+\pi\neq\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi, k\in\mathbb{Z} \\ &\iff x+\pi\neq\frac{\pi}{2}+k'\pi, k'\in\mathbb{Z} \\ &\iff x+\pi\in\mathscr{D} \end{aligned}.$$

Donc $\forall x\in\mathscr{D}, x+\pi\in\mathscr{D}$.

De plus, $\tan(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\dfrac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x$.

Ainsi $\boxed{\text{la fonction tangente est } \pi-\text{ périodique}}$.

- La fonction tangente est $\pi-$ périodique donc on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude π (et centré en 0 pour utiliser ensuite la parité) : par exemple sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

  De plus, la fonction tangente est impaire donc on peut l'étudier sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

  Ainsi $\boxed{\text{on peut étudier la fonction tangente sur } \left[0;\frac{\pi}{2}\right[}$.

3. (a) Justifier que la fonction tan est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

La fonction tangente est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Remarque :

On a aussi $\tan'(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

(b) Etudier son sens de variation.

$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[, \cos^2 x>0$ donc $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x)>0$.

Alors la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, elle est impaire donc elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Ainsi la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

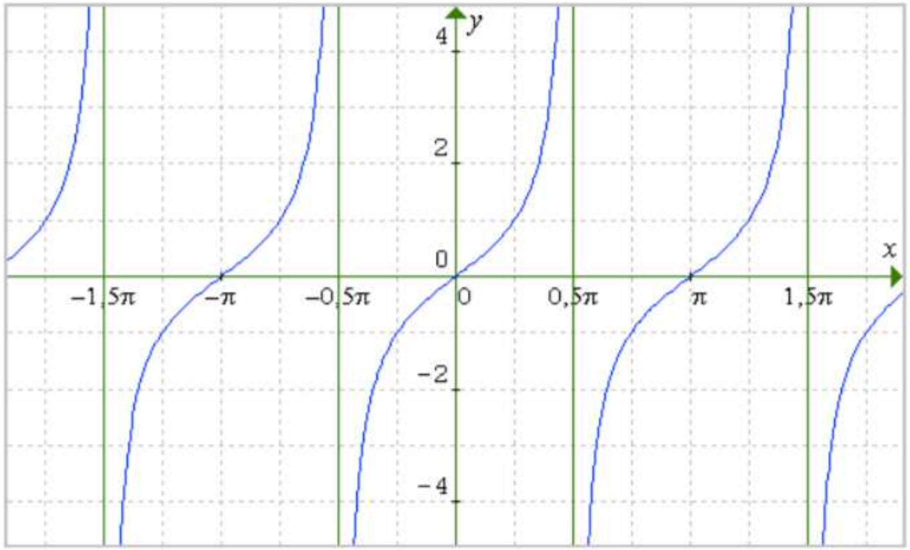
(c) Calculer les limites de la fonction tan aux bornes de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et en donner une interprétation graphique.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty}$.

De plus, la fonction tangente est impaire donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty}$.

Ainsi $\boxed{\text{les droites d'équations } x = \frac{\pi}{2} \text{ et } x = -\frac{\pi}{2} \text{ sont asymptotes}}$ $\boxed{\text{verticales à la courbe représentative de la fonction tangente}}$.

4. Tracer la courbe représentative de la fonction tan.



Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. (a) Montrer que f est $2\pi-$périodique.
Quelle conséquence graphique peut-on en tirer?

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.

De plus $f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) - \cos[2(x+2\pi)] = 2\cos x - \cos(2x+4\pi) = 2\cos x - \cos 2x = f(x)$.

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique et la courbe est invariante par}}$ $\boxed{\text{translation de vecteur } 2\pi\vec{i}}$.

(b) Etudier la parité de f.
Quelle conséquence graphique peut-on en tirer?

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.

De plus, $f(-x) = 2\cos(-x) - \cos[2(-x)] = 2\cos x - \cos(-2x) = 2\cos x - \cos 2x = f(x)$.

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire et la courbe } \mathscr{C} \text{ est symétrique par rapport}}$ $\boxed{\text{à l'axe des ordonnées}}$.

(c) Sur quel intervalle peut-on restreindre l'étude de f ?

La fonction f est 2π-périodique, on peut donc l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple : $[-\pi;\pi]$.

La fonction f est paire, donc on peut l'étudier sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Ainsi $\boxed{\text{on peut étudier la fonction } f \text{ sur l'intervalle } [0;\pi]}$.

2. (a) Calculer la dérivée de la fonction f et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sin x(2\cos x - 1)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence et composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\sin x - (-2\sin 2x) = -2\sin x + 2\sin 2x = -2\sin x + 4\cos x \sin x = 2\sin x(2\cos x - 1)$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sin x(2\cos x - 1)}$.

(b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0;\pi]$ et dresser son tableau de variation sur une période.

$\forall x \in [0;\pi], \sin x \geq 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$.

$2\cos x - 1 \geq 0 \iff \cos x \geq \dfrac{1}{2} \iff 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$.

Alors f' est positive sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$.

Donc f est croissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$		0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
Variations de f	-3	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	-3

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une période.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - \cos x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

On appelle $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in \mathscr{D} \iff \sin x - \cos x \neq 0 \iff \sin x \neq \cos x \iff x \not\equiv \dfrac{\pi}{4} [\pi]$.

Donc $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

2. (a) Montrer que f est périodique de période π puis que $A\left(\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

Soit $x \in \mathscr{D}$.

$$\begin{aligned} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{4} + k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x + \pi \neq \frac{\pi}{4} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{x + \pi \in \mathscr{D}}$.

$f(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi) - \cos(x+\pi)} = \dfrac{-\cos x}{-\sin x + \cos x} = f(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est périodique de période } \pi}$.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{3\pi}{4} + h \in \mathscr{D}$ et $\dfrac{3\pi}{4} - h \in \mathscr{D}$.

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{4} + h \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\iff h \neq \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff h \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff h \neq -\pi + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff h \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{4} - h \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\iff -h \neq \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -h \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff h \neq \frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff h \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{h \in \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{3\pi}{4}-h\right) &= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-h\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-h\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-h\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos h+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin h}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos h-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin h-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos h-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin h}\\
&= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos h+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin h}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos h+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin h+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos h-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin h}\\
&= \frac{-\cos h+\sin h}{2\cos h}
\end{aligned}$$

De plus,

$$f\left(\frac{3\pi}{4}+h\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}-(-h)\right)=\frac{-\cos(-h)+\sin(-h)}{2\cos(-h)}=\frac{-\cos(h)-\sin(h)}{2\cos(h)}.$$

Donc $f\left(\frac{3\pi}{4}+h\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}-h\right)=-1=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi $\boxed{A\left(\frac{3\pi}{4};-\frac{1}{2}\right) \text{ est centre de symétrie de } \mathscr{C}}$.

(b) En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de f à l'intervalle $I=\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

f est $\pi-$ périodique donc on peut étudier f sur un intervalle de longueur π.

De plus, A est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ donc on prend un intervalle centré en $\frac{3\pi}{4}$: par exemple sur $\left]\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right[$ et l'étude sur $I=\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ suffit.

3. (a) Etudier les variations de f sur I et calculer sa limite en $\frac{\pi}{4}$.

La fonction f est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I et dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x\in I$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\sin x(\sin x-\cos x)-\cos x(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}\\
&= \frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}\\
&= \frac{-1}{(\sin x-\cos x)^2}
\end{aligned}$$

$\forall x\in I, f'(x)<0$ donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } I}$.

Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} f(x)$. *Pour cela, écrivons autrement $f(x)$ pour tout $x\in I$.*

Soit $x\in I$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cos x}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)}\\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)}\\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\sin X=0^+$ donc

par composée, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0^+$.

Ainsi par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} f(x)=+\infty}$.

Remarque :

La droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

(b) Dresser son tableau de variation sur une période.

A est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ et f est strictement décroissante sur I donc f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[$.

On obtient donc le tableau de variations de f :

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
Variations de f	$\Vert$ $+\infty$ $\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$ $-\infty$ $\Vert$

(c) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ donc

$\boxed{\text{la tangente à } \mathscr{C} \text{ en } A \text{ a pour équation } y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}}$.