

TD 6 : Calculs algébriques et primitives



OBJECTIFS :

- AL 12-1 : Savoir manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
- AL 12-2 et AL 12-3 : Calculer des sommes et des produits en utilisant les sommes de référence et/ou en effectuant des changements d'indice.
- AL 12-4 et AL 12-5 : Calculer des sommes doubles rectangulaires ou triangulaires.
- AL 12-6 : Manipuler les coefficients binomiaux, calculer des sommes les faisant intervenir.
- AL 12-7 : Savoir utiliser la formule du binôme de Newton pour des nombres.
- AL 12-8 : Savoir utiliser la formule du binôme de Newton pour des matrices.
- AN 13-1 et AN 13-2 : Calculer une primitive ou une intégrale d'une fonction usuelle, d'une fonction rationnelle.
- AN 13-3 et AN 13-4 : Calculer une primitive ou une intégrale par intégration par parties ou par changement de variable
- AN 13-5 : Etablir une relation de récurrence vérifiée par une suite.
- AN 13-6 : Linéariser une fonction trigonométrique pour en déduire une primitive.
- AN 13-7 : Calculer une primitive ou une intégrale d'une fonction à valeurs réelles en utilisant des fonctions à valeurs complexes.

Calculs algébriques

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$1. S_n = \sum_{k=0}^n 3^{2k+1}$$

$$2. S_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$$

$$3. S_n = \sum_{k=1}^n (3k + e^{-k} + 2)$$

$$4. S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{3^{2k-1}}$$

$$5. S_n = \sum_{k=0}^n (3^{k+1} - 3k + 4)$$

$$6. S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

$$7. S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}.$$

$$8. S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2}{k^2 + 4k + 3}.$$

$$9. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}.$$

$$10. S_n = \sum_{k=1}^n k \times k!$$

$$11. S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$12. S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{n-k}$$

$$13. S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1}$$

$$14. S_n = \sum_{i=1}^n i 2^i \text{ en posant } j = i - 1.$$

EXERCICE 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En exprimant de deux manières différentes

$$S_n = \sum_{k=0}^n [(k+1)^3 - k^3], \text{ calculer } T_n = \sum_{k=0}^n k^2.$$

2. *Application* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$T_n = \sum_{k=1}^n (3k+1)(2k-1) \text{ et } U_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + (n-1)2 + n.$$

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i$
2. $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)$
3. $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)^2$
4. $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |j - i|$
5. $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j + 1}$
6. $S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} j$
7. $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. Montrer que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En posant $p = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n .
2. En déduire que $2S_n = 2^{2n+1}$ et conclure.

EXERCICE 5

Soit $n \geq 2$. Calculer les produits suivants :

- | | |
|---|--|
| 1. $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ | 3. $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1}$ |
| 2. $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ | 4. $P_n = \prod_{k=1}^n (6k-3)$ |

EXERCICE 6

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Factoriser les nombres $k^3 - 1$ et $k^3 + 1$.
2. En déduire, sans utiliser de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n + 1)}$$

3. En déduire que la suite $\left(\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} \right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 7

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer B^2 puis B^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

On pose $C = B - A$.

Calculer A^n et B^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 8

Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$
2. $\int_0^\pi \cos(t)e^{\sin(t)} dt$
3. $\int_0^{\pi/4} \tan(t) dt$
4. $F : x \mapsto \int^x te^{t^2} dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. $F : x \mapsto \int^x \frac{1}{t} \ln(t) dt$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.
6. $F : x \mapsto \int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt$, pour tout $x \in]1; +\infty[$.

EXERCICE 9

Calculer les intégrales et primitives suivantes en utilisant un changement de variable :

1. $F : x \mapsto \int^x \frac{1}{\cos t} dt$, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, en posant $u = \sin t$.
2. $I = \int_1^4 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$, en posant $t = 1 + \sqrt{x}$.
3. $F : x \mapsto \int^x \cos(\ln t) dt$, pour tout $x \in]0; +\infty[$, en posant $u = \ln t$.
4. $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$, en posant $t = \frac{\pi}{4} - x$.
5. $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$, en posant $t = \pi - x$.
6. Soit $a \in]1; +\infty[$, $I_a = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$, en posant $x = \frac{1}{t}$.

$$7. I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \text{ en posant } u = \frac{1}{t}.$$

EXERCICE 10

Calculer une primitive de chacune des fonctions f suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ | 6. $f : x \mapsto \frac{2x^2+7}{x^2+9}$ |
| 2. $f : x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$ | 7. $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2-3x-4}$ |
| 3. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ | 8. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x^2+4x+7}$ |
| 4. $f : x \mapsto \frac{2}{x^2-5x+6}$ | 9. $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x^2+1}$ |
| 5. $f : x \mapsto \frac{2}{4x^2+9}$ | |

EXERCICE 11

Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $F : x \mapsto \int^x e^{-\sqrt{t}} dt$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.
2. $F : x \mapsto \int^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.
3. $F : x \mapsto \int^x \frac{1}{\text{ch}(t)} dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. $I = \int_{-1}^1 t \text{Arctan}(t) dt$
5. $I = \int_0^{\pi/4} (1 - \tan^2 x) dx$.
6. $F : x \mapsto \int^x \ln(1+t^2) dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. $F : x \mapsto \int^x \frac{t^2+3t+1}{t^2-1} dt$.

8. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx.$
9. $I = \int_0^1 (x^2 - 3)e^x dx$
10. $F : x \mapsto \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.
11. $F : x \mapsto \int^x \cos^5(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}.$

EXERCICE 12

On considère les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$
Le but de l'exercice est de calculer les valeurs de I et de $J.$

1. 1ère méthode :

- (a) Calculer $I + J.$
- (b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = J$ et en déduire leur valeur commune.

2. 2ème méthode :

Calculer I et J directement en utilisant une formule trigonométrique.

EXERCICE 13

1. Pour tout $n \in \mathbb{N},$ on pose $u_n = \int_1^e (\ln x)^n dx.$
Etablir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N},$ on pose $v_n = \int_0^{\pi} x^n \cos x dx.$
Etablir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}.$

EXERCICE 14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt.$

1. Soit $n \in \mathbb{N}.$ Exprimer u_{n+2} en fonction de $u_n.$
2. En déduire u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}.$

EXERCICE 15

Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2,$ on considère l'intégrale $I_{m,n} = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt.$

1. Exprimer $I_{m+1,n-1}$ en fonction de $I_{m,n}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2.$
2. En déduire une expression explicite de $I_{m,n}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2.$