

TD 4 : Nombres réels, nombres complexes

Éléments de correction

EXERCICE 3

Démontrer l'inégalité "classique" : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 \geq 0$ donc $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

On a également $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a + b)^2 \geq 0$ donc $-ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

D'où $-\frac{a^2 + b^2}{2} \leq ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Ainsi $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ pour tous réels a et b .

EXERCICE 4

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$. Donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x + y$.

$\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x + y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}, \lfloor x + \alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{Z}$.

$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + \alpha \leq x + \alpha < (\lfloor x \rfloor + \alpha) + 1$.

$\lfloor x \rfloor + \alpha$ est un entier relatif donc $\lfloor x + \alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

EXERCICE 7

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4} < 1$ donc $n^2 + n + \frac{1}{4} < n^2 + n + 1$. Alors $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < n^2 + n + 1$.

De plus, $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $2n > n$ et donc $n^2 + 2n + 1 > n^2 + n + 1$. On en déduit que $(n + 1)^2 > n^2 + n + 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$.

2. Montrer que $\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor$ est un nombre impair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$ donc par croissance sur de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $n + \frac{1}{2} < \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1$.

Alors $2n + 1 < 2\sqrt{n^2 + n + 1} < 2n + 2$ et donc $\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor = 2n + 1$.

Ainsi $\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor$ est un nombre impair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 10

5. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan \frac{\theta}{2}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \frac{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Ainsi $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan \frac{\theta}{2}$.

EXERCICE 11

1. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia} e^{ib} \\ &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b) \end{aligned}$$

Donc $\cos(a+b) = \operatorname{Re}(e^{i(a+b)}) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et

$$\sin(a+b) = \operatorname{Im}(e^{i(a+b)}) = \cos a \sin b + \sin a \cos b.$$

2. Montrer que $\forall (a, b, t) \in \mathbb{R}^3, \exists (A, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} / a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \phi)$.

Soit $(a, b, t) \in \mathbb{R}^3$.

Analyse : On suppose qu'il existe $A > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \phi).$$

Puisque $\cos(t - \phi) = \cos t \cos \phi + \sin t \sin \phi$, alors par identification,

$$a = A \cos \phi \text{ et } b = A \sin \phi.$$

Synthèse : Posons $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Cas 1 : Si $a = b = 0$, alors $A = 0$, et $a \cos t + b \sin t = 0 = A \cos(t - \phi)$, quel que soit ϕ . Le résultat est donc valable.

Cas 2 : Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $A > 0$. On peut donc définir $\phi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos \phi = \frac{a}{A} \text{ et } \sin \phi = \frac{b}{A}.$$

On a alors $A \cos(t - \phi) = A \cos t \cos \phi + A \sin t \sin \phi = a \cos t + b \sin t$.

Ainsi, $\forall (a, b, t) \in \mathbb{R}^3, \exists (A, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} / a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \phi)$.

EXERCICE 14

Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z non nul, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\frac{1}{z}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

$$\text{Soit } z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z \iff -\frac{1}{z} = z \iff z\bar{z} = -1 \iff |z|^2 = -1.$$

Or $|z|^2$ est un réel positif donc l'équation $f(z) = z$ n'a pas de solution.

Donc l'ensemble des points invariants par f est l'ensemble vide.

2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{z' + 1} = \frac{z-1}{z}$ puis que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, |z' + 1| = |z'| \iff |z-1| = 1.$$

$$\text{Soit } z \in \mathbb{C}^*, \overline{z' + 1} = -\frac{1}{z} + 1 = -\frac{1}{z} + \frac{z}{z} = \frac{z-1}{z}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} |z' + 1| = |z'| &\iff |\overline{z' + 1}| = |z'| \\ &\iff \left| \frac{z-1}{z} \right| = \left| -\frac{1}{z} \right| \\ &\iff \frac{|z-1|}{|z|} = \frac{1}{|z|} \\ &\iff \frac{|z-1|}{|z|} = \frac{1}{|z|} \\ &\iff |z-1| = 1 \end{aligned}$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{z' + 1} = \frac{z-1}{z}$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*, |z' + 1| = |z'| \iff |z-1| = 1$

3. Soit M un point d'affixe z non nul et M' d'affixe z' son image par f .

(a) Etablir une relation entre OM et OM' .

$$z' = -\frac{1}{z} \text{ donc } OM' = |z'| = \left| -\frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{OM}.$$

$$\text{Donc } OM' = \frac{1}{OM}.$$

- (b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et en donner une interprétation géométrique.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) &\equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi] \iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \arg\left(-\frac{1}{z\bar{z}}\right)[2\pi] \\ &\iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \arg\left(-\frac{1}{|z|^2}\right)[2\pi] \\ &\iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \pi[2\pi]\end{aligned}$$

Donc les points O, M et M' sont alignés avec $O \in [MM']$.

4. Soit A le point d'affixe 1 et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1. Construire l'image M' par f d'un point M quelconque, distinct de O , appartenant à $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}M \in \mathcal{C} \setminus \{O\} &\iff \begin{cases} M \neq O \\ AM = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z \in \mathbb{C}^* \\ |z-1| = 1 \end{cases} \\ &\iff |z'+1| = |z'| \\ &\iff BM' = OM' \text{ avec } B \text{ le point d'affixe } -1.\end{aligned}$$

Donc M' appartient à la médiatrice du segment $[BO]$.

Les points O, M et M' sont alignés avec $M' \in [MO]$.

Ainsi M' est le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BO]$

et de $[MO]$.

Faire une figure en plaçant M où vous voulez!

EXERCICE 16

On considère $A(-1+i)$ et $B(1+4i)$.

1. Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- (a) Déterminer l'écriture complexe de R .

Soit $z \in \mathbb{C}$, R a pour écriture complexe $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$, c'est-à-dire $z' = -i(z + 1 - i) - 1 + i = -iz - 2$.

Donc R a pour écriture complexe $z' = -iz - 2$.

- (b) Déterminer l'affixe du point C , image du point B par la rotation R .

$$z_C = -iz_B - 2 = -i(1+4i) - 2 = 2 - i.$$

Donc le point B a pour image $C(2-i)$ par la rotation R .

2. On pose $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Soit D l'image du point C par la translation t de vecteur $\vec{w}$. Déterminer l'affixe du point D .

t a pour écriture complexe $z' = z + z_{\vec{w}}$ c'est-à-dire $z' = z + \frac{1}{2}(1+4i - (-1+i)) = z + 1 + \frac{3}{2}i$.

Alors $z_D = z_C + 1 + \frac{3}{2}i = 2 - i + 1 + \frac{3}{2}i = 3 + \frac{1}{2}i$. Ainsi D a pour affixe $3 + \frac{1}{2}i$.

3. On considère la transformation T d'écriture complexe $z' = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T .

T a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{2}{3}$.

Donc $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors T est une homothétie de rapport $\frac{2}{3}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z' = z \iff \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i = z \iff \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i = \frac{1}{3}z \iff z = 1 + 4i \iff z = z_B$.

Donc B est l'unique point invariant de T .

Ainsi T est l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ et de centre B .

4. On note E l'image du point C par la transformation T . Montrer que les points A, D et E sont alignés.

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \arg\left(\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}\right)[2\pi] = \arg\left(\frac{\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i + 1 - i}{3 + \frac{1}{2}i + 1 - i}\right)[2\pi] =$$

$$\arg\left(\frac{\frac{8}{3} - \frac{1}{3}i}{4 - \frac{1}{2}i}\right)[2\pi] = \arg\left(\frac{\frac{2}{3}(4 - \frac{1}{2}i)}{4 - \frac{1}{2}i}\right)[2\pi] = \arg\left(\frac{2}{3}\right)[2\pi] = 0[2\pi].$$

Donc les points A, D et E sont alignés.